

Optimisation

Chapitre 4 : Existence et unicité de solution

Joseph GERGAUD, Serge GRATTON & Daniel RUIZ

14 septembre 2023

Théorème 4.2.1 – Existences de solution, cas avec contraintes

Soit (P) un problème d'optimisation avec contraintes $C \subset E$. Si f est continue et C est un compact non vide, alors le problème (P) admet une solution.

- C'est une application immédiate du théorème qui dit que l'image d'un compact par une application continue dans un espace séparé est un compact. ■

Définition 4.2.2 – Fonction 0-coercive

Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E espace vectoriel normé, est dite 0-coercive si et seulement si

$$f(x) \longrightarrow +\infty \text{ quand } \|x\| \longrightarrow +\infty. \quad (1)$$

Théorème 4.2.3

Soit (P) un problème d'optimisation avec contraintes où f est une fonction de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} et C est un fermé non vide. Si f est continue et 0-coercive, alors le problème admet une solution.

► Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante de points de C , c'est-à-dire une suite de point de C telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \inf_{x \in C} f(x) = \mu < +\infty$. Montrons que cette suite est bornée. Sinon il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\|x_{n_k}\|$ tende vers $+\infty$ lorsque n_k tend vers $+\infty$ et donc, comme f est 0-coercive, $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$, ce qui est impossible.

Par suite il existe un réel $R > 0$ tel que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit contenue dans $C \cap B_f(0, R)$ qui est un fermé borné de \mathbb{R}^n ; c'est donc un compact dont on peut extraire une sous-suite qui converge vers x^* . Mais f est continue, et donc $f(x^*) = \mu$ et x^* est une solution du problème d'optimisation. ■

Remarque 4.2.1. Le théorème précédent s'applique si le problème d'optimisation est sans contraintes car dans ce cas $C = E$.

Théorème 4.3.1

Si C est un convexe de E espace vectoriel normé et si f est une fonction de C à valeurs dans \mathbb{R} convexe, alors l'ensemble des solutions est soit vide soit un ensemble convexe de E .

► Supposons que l'ensemble des solutions ne soit pas vide. Soient x et y deux solutions alors $f(x) = f(y)$ car ($f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$). Par suite, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, nous avons

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x) \leq f(x).$$

En conséquence $\alpha x + (1 - \alpha)y$ est aussi une solution. ■

Théorème 4.3.2

Si C est un convexe de E espace vectoriel normé et si f est une fonction de C à valeurs dans \mathbb{R} strictement convexe, alors il existe au plus un point x^* minimisant f sur C .

► Supposons qu'il existe deux solutions x_1 et x_2 . Pour $\alpha \in]0, 1[$, on pose $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, alors, puisque f est strictement convexe on a

$$f(x_\alpha) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) = f(x_1) = f(x_2),$$

ce qui est impossible. ■

Théorème 4.3.3

Si C est un convexe de E espace vectoriel normé et si f est une fonction de C à valeurs dans \mathbb{R} convexe, alors tout minimum local x^* de f sur C est un minimum global de f sur C .

► Soit x^* un minimum local de f sur C . Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in C \cap B(x^*, \eta)$, $f(x^*) \leq f(x)$. Supposons maintenant qu'il existe dans C un point y tel que $f(y) < f(x^*)$. Alors, puisque f est convexe, on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} f(x^* + \alpha(y - x^*)) &= f((1 - \alpha)x^* + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x^*) + \alpha f(y) \\ &< (1 - \alpha)f(x^*) + \alpha f(x^*) = f(x^*). \end{aligned}$$

Mais pour α suffisamment proche de 0, $x^* + \alpha(y - x^*) \in B(x^*, \eta)$, d'où la contradiction. ■

Exercice 4.3.1. Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = -x_1^3 - 2x_2^2 - x_2 \\ x \in C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_2 = 0\}. \end{cases}$$

1. Montrer que (P) possède une solution.

2. Déterminer si (P) est convexe.

Exercice 4.3.2. Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = (1/2) \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c \\ x \in \mathbb{R}^n \\ Cx = d \end{cases}$$

où $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $C \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $d \in \text{Im } C$. Donner une condition suffisante sur A assurant l'existence et l'unicité de solution à (P) .