



## TD 3 – Convexité

▷ **Exercice 1.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

**1.1.** Montrer que toute application norme, définie sur  $E$ , est convexe sur  $E$ . Que dire de la *stricte* convexité ?

**1.2.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications convexes sur  $C$ , convexe de  $E$ . Montrer que  $\forall \lambda \geq 0, \forall \mu \geq 0, \lambda f + \mu g$  est une application convexe sur  $C$ .

**1.3.** Soient  $(f_i)_{i \in I}, I$  fini, une famille d'applications convexes définies sur un convexe  $C$  de  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$  est une application convexe sur  $C$ .

▷ **Exercice 2.**

**2.1.** Pensez-vous qu'il existe des fonctions strictement convexes non croissantes à l'infini ?

▷ **Exercice 3.** Soit  $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x_1 \ln(x_1) + x_2 \ln(x_2) - (x_1 + x_2) \ln(x_1 + x_2)$ . Montrer que  $f$  est convexe sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  et donner un sous-ensemble  $C$  de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  sur lequel  $f$  soit strictement convexe.