



Examen – Optimisation - EDP, session 2

1 introduction

- Documents autorisés : 1 page A4 recto verso manuscrite ;
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Un corrigé sera mis sous Moodle dans la journée.

2 Exercices

▷ **Exercice 1.** (5 points)

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3 - x_1 - x_2 \\ \beta \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

1.1. Calculer $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$.

►

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 1 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.2. Calculer la trace de $\nabla^2(f(x))$.

► $\text{trace}(\nabla^2 f(x)) = -1$

1.3. Le problème (P) admet-il des solutions, admet-ils des minima locaux ?

► En tout point la trace de la matrice jacobienne est négative. Par suite il existe une valeur propre strictement négative. La condition nécessaire du deuxième ordre n'est donc pas vérifiée. En conclusion, il n'existe pas de minima locaux et le problème n'admet pas de solution.

▷ **Exercice 2.** (6 points) Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} deux fois dérivable en tout point de \mathbb{R}^2 .

2.1. Démontrer le lemme

Lemme 1. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. On note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors (x_0, y_0) est un minimum local de f .
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors (x_0, y_0) est un maximum local de f .
3. Si $rt - s^2 < 0$ alors (x_0, y_0) n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f .
4. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

► On a

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

par suite $rt - s^2 = \det \nabla^2 f(x_0, y_0)$.

1. $rt > s^2$, donc si $r > 0$, t est aussi strictement positif. On a donc $\det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) > 0$ et $\text{tr}(\nabla^2 f(x_0, y_0)) > 0$. Par suite la matrice hessienne est définie positive en (x_0, y_0) . La condition suffisante du deuxième ordre implique alors que (x_0, y_0) est un minimum local de f .
2. De même les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement négatives et donc (x_0, y_0) est un maximum local de f .
3. Dans ce cas la matrice hessienne $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ a une valeur propre négative et une valeur propre positive. On ne peut donc pas avoir ni un minimum local, ni un maximum local.
4. Ici le déterminant de la matrice hessienne est nulle. Les conditions du deuxième ordre ne permettent pas de conclure.

2.2. Donner des exemples qui correspondent aux 4 cas du théorème précédent.

► On considère

$$f(x, y) = 0.5 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1. $A = I$;
2. $A = -I$;
3. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a des minima locaux

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a des maxima locaux

- (c) $f(x, y) = x^3 + y^2$. $\nabla f(0, 0) = 0$ et $\nabla^2 f(0, 0)$ est semi définie positive, mais $(0, 0)$ n'est pas un minimum local de f .

▷ **Exercice 3.** (3 points)

Soit f une fonction de classe C^1 de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} . On définit alors l'ensemble $M = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = 0\}$. On appelle alors vecteur tangent à M en $x_0 \in M$, tout vecteur $v = \varphi'(0)$ où φ est une fonction dérivable d'un intervalle I ouvert de \mathbb{R} contenant 0 à valeur dans M et vérifiant $\varphi(0) = x_0$.

3.1. En considérant la composée $g = f \circ \varphi$ démontrer que tout vecteur tangent à M en x_0 est orthogonal au gradient $\nabla f(x_0)$.

► Pour tout t dans I on a $g(t) = f(\varphi(t)) = 0$. Donc par le théorème des fonctions composées on a $g'(0) = J_f(\varphi(0))J_\varphi(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0$.

▷ **Exercice 4** (Le problème du positionnement GPS). (6 points)

On se place dans le cadre d'une constellation GPS. Tout utilisateur disposant d'un récepteur GPS reçoit de la part de tous les satellites visibles des informations lui permettant de déterminer sa position par triangulation.

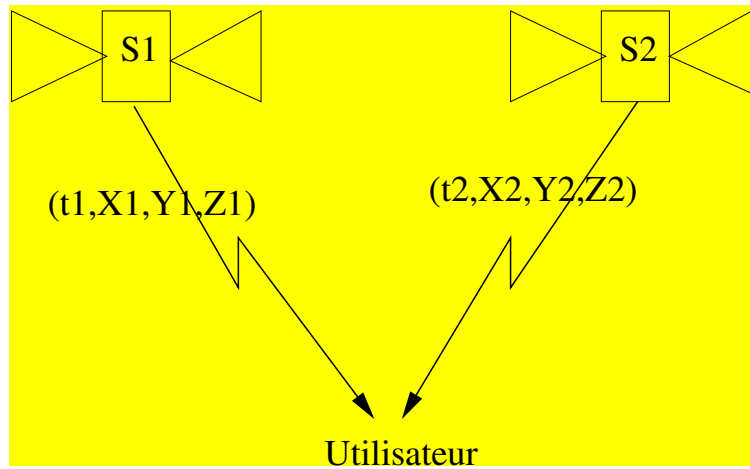


FIGURE 1 – Positionnement GPS.

Les informations renvoyées par le satellite S_i sont :

- la date d'émission du message t_i ,
- la position du satellite au moment de l'émission (x_i, y_i, z_i) .

L'utilisateur peut alors calculer la distance d_i qui le sépare du satellite S_i connaissant la vitesse de propagation du signal c . En combinant chacune des distances obtenues, l'utilisateur détermine sa position P par triangulation.

On introduira de plus un biais τ entre l'horloge interne des satellites – H_g – (horloge atomique parfaitement synchronisée) et l'horloge du récepteur – H_r – (horloge à quartz). Donc : $H_r = H_g + \tau$.

Mise en équation du problème

On considère que les instruments de mesure sont parfaits, c'est à dire pas d'erreur sur la position des satellites $(x_i, y_i, z_i)_{i=1, \dots, N}$ (N étant le nombre de satellites visibles), sur la date d'émission des signaux (t_i) et sur la date de réception (tu_i).

Soient $P_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ la position des satellites visibles et $P_u = (x_u, y_u, z_u)^T$ la position de l'utilisateur à déterminer. On a :

$$d_i = c \times ((tu_i - \tau) - t_i) = \|P_u - P_i\|_2$$

où c est la vitesse de propagation du signal.

Il faut donc déterminer au mieux la position de l'utilisateur P_u et le biais d'horloge τ afin de minimiser l'écart entre $c \times ((tu_i - \tau) - t_i)$ et $\|P_u - P_i\|_2$, ceci pour l'ensemble des satellites visibles $1 \leq i \leq N$.

4.1. Exprimer le problème d'optimisation

$$\min_{\beta} \frac{1}{2} \|R(\beta)\|^2$$

relatif à l'estimation au sens des moindres carrés de la position de l'utilisateur et du biais d'horloge. On précisera l'espace des paramètres β , ainsi que l'application “résidus” $R(\beta)$.

► La fonction résidus est définie par

$$R: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\beta = (x_u, y_u, z_u, \tau) \longmapsto R(\beta) = \begin{pmatrix} R_1(\beta) \\ \vdots \\ R_N(\beta) \end{pmatrix}$$

avec $R_i(\beta) = \sqrt{(x_u - x_i)^2 + (y_u - y_i)^2 + (z_u - z_i)^2} - c((tu_i - \tau) - t_i)$.

4.2. Exprimer la dérivée de l'application “résidus” qui intervient dans la formulation du problème.

►

$$J_R(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{x_u - x_1}{\|P_u - P_1\|} & \frac{y_u - y_1}{\|P_u - P_1\|} & \frac{z_u - z_1}{\|P_u - P_1\|} & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_u - x_i}{\|P_u - P_i\|} & \frac{y_u - y_i}{\|P_u - P_i\|} & \frac{z_u - z_i}{\|P_u - P_i\|} & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_u - x_N}{\|P_u - P_N\|} & \frac{y_u - y_N}{\|P_u - P_N\|} & \frac{z_u - z_N}{\|P_u - P_N\|} & c \end{pmatrix}$$

4.3. Écrire formellement l'itération de Gauss-Newton permettant de résoudre le PB aux moindres carrés non linéaire précédent.

► À chaque itération on résout le problème aux moindres carrés suivants

$$(P_k) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|R(\beta^{(k)}) + J_R(\beta^{(k)})\delta\|^2 \\ \delta \in \mathbb{R}^4, \end{cases}$$

dont la solution est la solution du système linéaire

$$J_R(\beta^{(k)})^T J_R(\beta^{(k)})\delta = -J_R(\beta^{(k)})^T r(\beta^{(k)}).$$

On pose ensuite $\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + \delta$