



TD EDP

▷ **Exercice 1.** Soit $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

avec $(c, f) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, et $\forall x \in [0, 1], c(x) \geq 0$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0, 1]$, de pas constant h . Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, les points de discrétisation du maillage.

1.1. En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde de u , écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire

$$A_h u_h = b_h, \quad (2)$$

avec $u_h = (u_i)_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$. Préciser u_0 et u_{N+1} satisfaisant les conditions aux limites du problème.

1.2. Montrer que la matrice A_h est symétrique définie positive. Que pouvez-vous conclure pour le système (2) ?

1.3. On suppose $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $\xi_h(u) = A_h \Pi_h(u) - b_h$ l'erreur de consistance du schéma (2), avec $\Pi_h(u) = (u(x_i))_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$. Montrer que

$$\|\xi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0, 1]} |u^{(4)}(y)|,$$

avec $\forall y \in \mathbb{R}^N, \|y\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} |y_i|$.

En conclure quant à l'ordre de consistance du schéma (2) pour la norme infinie.

1.4. On suppose toujours $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\|u_h - \Pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0, 1]} |u^{(4)}(y)|.$$

On admettra que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$.

En conclure quant à la convergence du schéma (2) pour la norme infinie.

▷ **Exercice 2.** Soit $u : \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[\times]0, 1[, \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

avec $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de Ω , de pas constants h_1 et h_2 dans chacune des deux directions. Soit $(x_{i,j})_{i=0:N_1+1, j=0:N_2+1}$ les points de discrétisation du maillage.

2.1. En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour chaque dérivée partielle d'ordre 2 de u , écrire le problème approché au point de grille $x_{i,j}$, avec $i \in \{0, \dots, N_1 + 1\}$ et $j \in \{0, \dots, N_2 + 1\}$. .

2.2. On pose $u_h = [u_{1,1}, \dots, u_{1,N_2}, u_{2,1}, \dots, u_{2,N_2}, \dots, u_{N_1,N_2}]^T \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$. Ecrire le schéma sous la forme matricielle $A_h u_h = f_h$ en précisant A_h et f_h .