



## TD 4 – Existence, unicité

▷ **Exercice 1.** Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+x_i}, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \langle b | x \rangle = 1, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont des vecteurs fixés de  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ .

**1.1.** Montrer que  $(P)$  possède une solution.

**1.2.** Déterminer si la solution de  $(P)$  est unique.

▷ **Exercice 2.** Soit  $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ . On rappelle que, par définition,  $A$  est dite *coercive* s'il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(Ax|x) \geq \alpha \|x\|^2$$

où  $(\cdot|\cdot)$  est le produit scalaire euclidien standard sur  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $A$  est définie positive si et seulement si  $A$  est coercive.

▷ **Exercice 3.** Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = (1/2) (Ax|x) + (b|x) + c \\ x \in \mathbb{R}^n \\ Cx = d \end{cases}$$

où  $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $C \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  et  $d \in \text{Im } C$ . Donner une condition suffisante sur  $A$  assurant l'existence et l'unicité de solution à  $(P)$ .

▷ **Exercice 4.** Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(X) = (1/2) \|X - A\|^2 \\ X \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \end{cases}$$

où  $A$  est une matrice fixée dans  $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$  muni de sa structure euclidienne habituelle. Montrer que  $(P)$  possède une solution et une seule.