



## TD: EDP

▷ **Exercice 1.** Soit  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in ]0, 1[, \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

avec  $(c, f) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , et  $\forall x \in [0, 1], c(x) \geq 0$ .

On souhaite approcher  $u$  par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de  $[0, 1]$ , de pas constant  $h$ . Soit  $(x_i)_{i=0:N+1}$ , avec  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ , les points de discrétisation du maillage.

**1.1.** En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde de  $u$ , écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire

$$A_h u_h = b_h, \quad (2)$$

avec  $u_h = (u_i)_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$ . Préciser  $u_0$  et  $u_{N+1}$  satisfaisant les conditions aux limites du problème.

**1.2.** Montrer que la matrice  $A_h$  est symétrique définie positive. Que pouvez-vous conclure pour le système (2) ?

**1.3.** On suppose  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$ . Soit  $\xi_h(u) = A_h \Pi_h(u) - b_h$  l'erreur de consistance du schéma (2), avec  $\Pi_h(u) = (u(x_i))_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$ . Montrer que

$$\|\xi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0, 1]} |u^{(4)}(y)|,$$

avec  $\forall y \in \mathbb{R}^N, \|y\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} |y_i|$ .

En conclure quant à l'ordre de consistance du schéma (2) pour la norme infinie.

**1.4.** On suppose toujours  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$ . Montrer que

$$\|u_h - \Pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0, 1]} |u^{(4)}(y)|.$$

On admettra que  $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$ .

En conclure quant à la convergence du schéma (2) pour la norme infinie.