

# Equations aux dérivées partielles

## Chap 1 : Introduction et principes de la méthode des différences finies

Joseph GERGAUD, Serge GRATTON, Ehouarn SIMON

10 septembre 2024

# Outline

## Objectifs

Pouvoir **comprendre, prédire, optimiser le comportement de systèmes complexes**, tels que ceux issus de la physique, la chimie, l'économie, etc..

- Prévoir le futur (météo, climat, évolution des marchés, ...);
- Systèmes difficilement accessibles à l'observation (astrophysique, océan, physique quantique, ...);
- Réduire les coûts de prototypage (ingénierie).

## Modélisation

Les **modélisations** de ces problèmes font intervenir des équations différentielles ordinaires (EDO), mais aussi des équations aux dérivées partielles (EDP), à savoir des équations pluri-dimensionnelles.

### Exemple 1.1.1.

- EDO :  $\frac{du}{dt}(t) = f(t, u(t))$ ;
- EDP :  $f(x, t, u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \dots) = 0$

Étapes :

**1- Modélisation :**

- ▷ Mise en équations du problème  $\Rightarrow$  équations aux dérivées partielles ;

**2- Analyse du modèle :**

- ▷ Existence, unicité de la solution dans des espaces à définir ;

**3- Discrétisation du problème :**

- ▷ Passage de la dimension infinie à la dimension finie ; étude de la "perte" d'information ;

**4- Résolution du problème discret :**

- ▷ Numérique, analyse du comportement de la solution numérique.

**Remarque 1.1.1.** Ce cours ne s'intéressera qu'aux **étapes 3 et 4**.

Prévoir l'évolution de l'atmosphère à des horizons et échelles multiples



▷ Variables pronostiques (vent, température, humidité, pression, hydrométéores, etc...).

## Equations de Navier-Stokes (fluide incompressible)

- Conservation de la masse

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

- Equations du mouvement

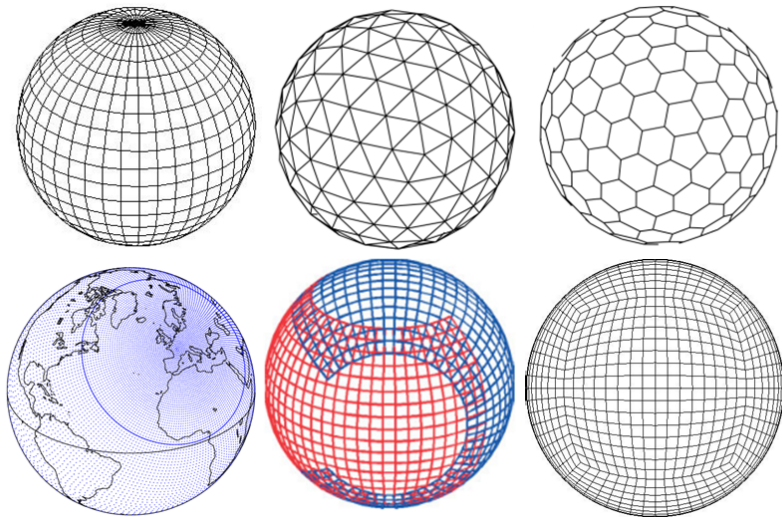
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0$$

avec  $\mathbf{u}$  le champs de vitesse,  $p$  la pression,  $\rho$  la densité du fluide, et  $\nu$  la viscosité cinématique.

### Remarque 1.1.2.

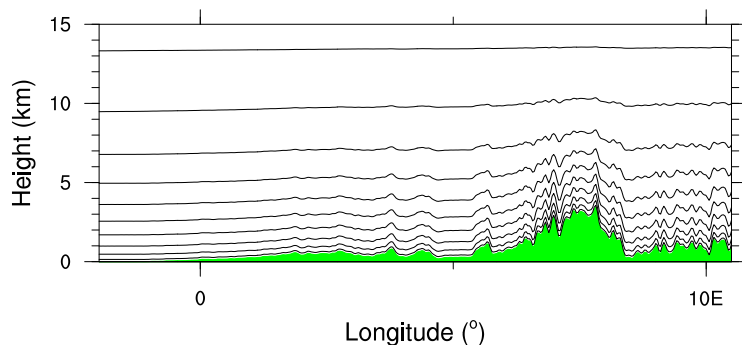
- Le problème de l'existence et unicité de la solution de ce système d'équations reste ouvert en 3 dimensions pour des temps long.
- Expressions analytiques d'éventuelles solutions inconnues.

Exemples de grilles horizontales..



## Exemples de gilles verticales à Météo-France : et la topographie ?

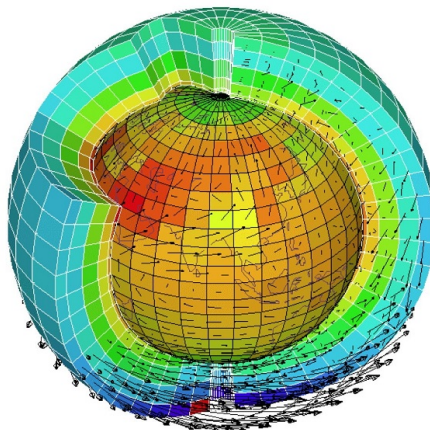
Coordonnée hybride : suit le terrain près du sol, puis se relaxe vers des niveaux pression.

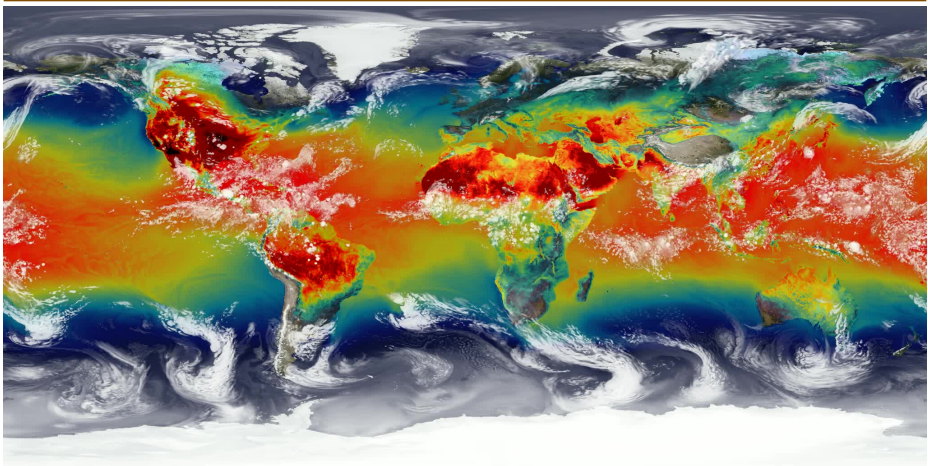




## Météorologie opérationnelle

- La prévision numérique du temps fournit des résultats bruts à post-traiter et à expertiser.
- ▷ Grâce aux équations de la physique, le modèle **propage les variables** de l'instant  $t$  à l'instant  $t + \Delta t$ .
- ▷ Quid de la **qualité** de la solution numérique ?





Température de surface (couleur)  
et rayonnement IR au sommet de l'atmosphère (blanc)

Source : <https://svs.gsfc.nasa.gov>

## Outline

- Le domaine, variable  $x$  est un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , en pratique,  $n = 1, 2$  ou  $3$ . Nous ferons l'hypothèse que la frontière de cet ouvert  $\partial\Omega = \Gamma$  est lipschitzienne. Cela signifie essentiellement que  $\Gamma$  est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne et que  $\Omega$  est situé d'un même coté par rapport à cette frontière.



FIGURE 1 –  $\Omega_1$  et  $\Omega_3$  sont possibles, mais non  $\Omega_2$ .

- Équation

$$f(t, x, u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x, t), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \dots) = 0$$

## Outline

**Exemple 1.3.1.** Fil élastique On considère un fil élastique dans un plan en équilibre sous l'effet de forces. On note  $u(x)$  la déformation du fil en  $x$ .

$$\begin{array}{ccc} u: & [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto u(x) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx}(x) = v(x) \\ \frac{dv}{dx}(x) = c(x)u(x) - f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

Il s'agit ici d'un problème aux deux bouts (une équation différentielle ordinaire avec des conditions aux instants initiaux et terminaux).

**Exemple 1.3.2.** On considère un pot de confiture cylindrique que l'on referme avec un film plastique souple (cellophane) maintenu fixé par un élastique au bord du pot. Au fur et à mesure que la confiture se refroidit, le film se déforme prenant une forme de plus en plus concave. Une fois la température stabilisée, le film est dans une position d'équilibre. Comment déterminer la forme de ce film ?.

Cette forme est définie par une fonction

$$\begin{aligned} u: \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto u(x_1, x_2), \end{aligned}$$

où  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|^2 < 1\}$ . Il s'agit donc de trouver la fonction  $u$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Delta u(x)$  est l'opérateur de Laplace

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x).$$

### Remarque 1.3.1.

- C'est aussi le modèle du tambour.
- Si  $c(x) = f(x) = 0$ , pour tout  $x \in \Omega$  et si  $\Delta \bar{u}(x) = 0$  alors  $\Delta \bar{u}(x) + Ax + b$  est aussi solution de  $\Delta u(x) = 0$ , d'où les conditions aux bords.

**Exemple 1.3.3.** On considère une membrane vibrante. La question est de déterminer à chaque instant  $t$  la position de cette membrane.

L'inconnue est ici une fonction

$$\begin{aligned} u: \quad \bar{\Omega} \times [0, T] = [0, 1]^2 \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto u(x, t). \end{aligned}$$

Et le problème s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & x \in \Omega \times ]0, T[ \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times ]0, T[ \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{array} \right.$$

où

$$\Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x, t).$$



**Exemple 1.3.4.** On cherche à déterminer la température d'un fil métallique chauffé à ses extrémités et plongé à l'instant initial dans une pièce, elle-même à une température donnée. Le fil est le segment  $[a, b]$  et on cherche la fonction

$$\begin{aligned} u: [a, b] \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto u(x, t) = \text{la température du fil en } x \text{ à l'instant } t. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver la fonction  $u$  telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & \forall (x, t) \in ]a, b[ \times ]0, T[ \\ u(a, t) = u_a(t), u(b, t) = u_b(t) & t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in ]a, b[ \end{cases}$$

où  $\Delta u(x)$  est l'opérateur de Laplace

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x).$$

- C'est aussi le modèle du tambour.  $f$  est la source extérieure de chaleur (0 si on amène rien).
- $u_a$  et  $u_b$  sont les températures aux extrémités du fil.

**Exemple 1.3.5.** Equation de la chaleur 2D

Trouver  $u$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_*^+, \quad \text{"Conditions aux limites"} \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega. \quad \text{"Conditions initiales"} \end{array} \right.$$

**Exemple 1.3.6.** Équation d'advection linéaire 1D

Trouver  $u$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_*^+, \quad \text{"Conditions aux limites"} \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega. \quad \text{"Conditions initiales"} \end{array} \right.$$

**Définition 1.3.1 – Ordre d'une EDP**

On appelle ordre d'une EDP, l'ordre le plus élevé des dérivées présentes dans l'équation.

**Exemple 1.3.7.** Les EDP présentes dans les exemples ?? et ?? sont respectivement d'ordre 2 et 1.

**Définition 1.3.2 – Conditions aux limites "classiques"**

- **Dirichlet** : la valeur de  $u(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$  ;
- **Neumann** : la valeur de  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$ , avec  $\nu$  normale sortante à  $\Gamma$  en  $x$  ;
- **Cauchy** : les valeurs de  $u(x)$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  sont données  $\forall x \in \Gamma$  ;
- **Robin** : la valeur de  $\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  des fonctions définies sur  $\Gamma$  ;

## Définition 1.3.3 – Classification des EDP d'ordre 2

Soit une EDP linéaire d'ordre 2 sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  et d'inconnue  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Elle peut s'écrire :

$$\forall z \in \Omega \quad \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{j,i}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i}(z) + \sum_{i=1}^d f_i(z) \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) + g(z)u(z) = h(z),$$

avec par convention  $\forall z \in \Omega \quad a_{j,i}(z) = a_{i,j}(z) \in \mathbb{R}$ ,  $(f_i(z))_{i=1:d} \in \mathbb{R}^d$ , et  $(g(z), h(z)) \in \mathbb{R}^2$ . On note  $A(z) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $[A(z)]_{i,j} = a_{i,j}(z)$ . L'EDP est dite :

- **Elliptique** en  $z \in \Omega$  si la matrice  $A(z)$  n'admet que des valeurs propres non nulles toutes de même signe ;
- **Hyperbolique** en  $z \in \Omega$  si la matrice  $A(z)$  admet  $d - 1$  valeurs propres non nulles de même signe, et une valeur propre non nulle de signe opposé.
- **Parabolique** en  $z \in \Omega$  si la matrice  $A(z)$  admet  $d - 1$  valeurs propres non nulles de même signe, et une valeur propre nulle.

**Remarque 1.3.2.** Les composantes de  $z$  renvoient aussi bien aux dimensions spatiales que temporelles.

- **Elliptique** : modèle stationnaire (thermique, électrostatique, membrane élastique, écoulement potentiel).

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ + \text{ conditions aux limites} \end{cases}$$

- **Hyperbolique** : modèle instationnaire (propagation d'ondes, électromagnétisme, élastodynamique).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ + \text{ conditions aux limites} + \text{ condition initiale} \end{cases}$$

- **Parabolique** : modèle instationnaire (diffusion thermique, chimique, neutronique, fluide visqueux incompressible).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ + \text{ conditions aux limites} + \text{ condition initiale} \end{cases}$$

# Outline

On se place en 1D :  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et on suppose " $u$  suffisamment régulière".

## Rappels

- $u$  est dérivable en  $x \in \mathbb{R}$  si  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} := u'(x)$ ;

- Développement de Taylor-Lagrange

On suppose  $u \in \mathcal{C}^{n+1}$  sur le segment  $[x, x+h]$ . Alors

$$\exists \xi_h \in ]x, x+h[ \text{ t.q. } u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^n \frac{h^i}{i!} u^{(i)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} u^{(n+1)}(\xi_h)$$

**Remarque 1.4.1.** L'utilisation du développement de Taylor-Lagrange de la fonction  $u$  à différents ordres  $n$  sera à la base de l'approximation des dérivées de  $u$  en un point particulier.

## Approximations de la dérivée d'ordre 1

**Proposition 1.4.1 – Une approximation décentrée**

On suppose  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^2$  sur le segment  $[x - h_0, x + h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . Il vient

$$\exists C \geq 0 \text{ t.q. } \forall h \in ]0, h_0] \quad \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 1.

► Soit  $h \in ]0, h_0]$ .  $u$  étant  $\mathcal{C}^2$  sur  $[x, x+h]$ , il vient par développement de Taylor - Lagrange  $\exists \xi_h \in ]x, x+h[$  t.q.  $u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(\xi_h)$ .  
D'où

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch$$

avec  $C = \frac{1}{2} \sup_{y \in [x, x+h_0]} |u^{(2)}(y)|$ . ■

**Remarque 1.4.2.** La constante  $C$  est indépendante du pas  $h$  choisi.



## Approximations de la dérivée d'ordre 1

**Proposition 1.4.2 – Une approximation centrée**

On suppose  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^3$  sur le segment  $[x - h_0, x + h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . Il vient

$$\exists C \geq 0 \text{ t.q. } \forall h \in ]0, h_0] \quad \left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq Ch^2$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 2.

► cf TD. ■

**Remarque 1.4.3.** La précision de l'approximation va dépendre de la régularité de la solution : plus la solution est régulière, plus on pourra espérer construire une approximation d'ordre élevée.

## Approximations de la dérivée d'ordre 2

**Proposition 1.4.3 – Une approximation centrée**

On suppose  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^4$  sur le segment  $[x - h_0, x + h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . Il vient

$$\exists C \geq 0 \text{ t.q. } \forall h \in ]0, h_0] \left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u^{(2)}(x) \right| \leq Ch^2$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 2.

► cf TD.

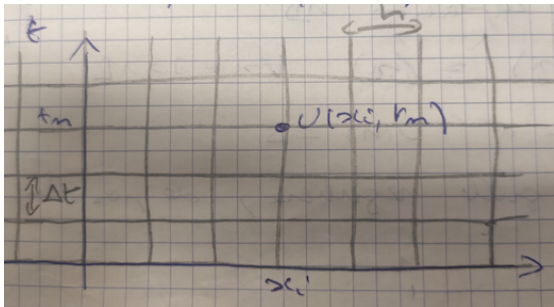
**Définition 1.4.4 – Ordre de consistance d'une approximation**

Une approximation de  $u^{(k)}(x)$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , est dite consistante à l'ordre  $p$ , s'il existe une constante positive et indépendante du pas  $h$ , notée  $C$ , telle que l'erreur d'approximation est majorée par  $Ch^p$  :

$$|\text{Approx}(u, x, h) - u^{(k)}(x)| \leq Ch^p.$$

## Idées

Supposons un problème spatio-temporel  $1D \times 1D$ . Soit le maillage régulier, de pas d'espace  $h$  et de pas de temps  $\Delta t$  :



avec  $\forall i \in \mathbb{N} \ x_i = ih$ , et  $\forall n \in \mathbb{N} \ t_n = n\Delta t$ .

On cherche une approximation  $u_h$  de la solution  $u$  en les points du maillage :

$$[u_h]_i^n := u_i^n \approx u(x_i, t_n).$$

## Idées

Ceci nous conduit à approcher les dérivées par **différences finies**.

**Exemple 1.4.1.** Dérivées partielles d'ordre 1

- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t},$
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t},$
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t},$
- etc..

**Exemple 1.4.2.** Dérivées partielles d'ordre 2

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2},$
- etc..

**Remarque 1.4.4.**

Il n'y a pas unicité du schéma d'approximation. Néanmoins, ceux-ci auront des propriétés d'approximation différentes.

## Laplacien 1D

Trouver  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1])$  telle que

$$\begin{cases} -u^{(2)}(x) = f(x), & \forall x \in ]0, 1[ \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

Soit une grille régulière  $(x_i)_{i \in \llbracket 0:N+1 \rrbracket}$  de  $[0, 1]$ , de pas d'espace  $h : \forall i \in \llbracket 0 : N+1 \rrbracket, x_i = ih$ . On cherche  $(u_i)_{i \in \llbracket 0:N+1 \rrbracket} \in \mathbb{R}^{N+2}$  approximant la solution  $u$  de l'EDP en les nœuds du maillage :

$$\forall i \in \llbracket 0 : N+1 \rrbracket, u_i \approx u(x_i).$$

**Conditions aux limites :**  $u(0) = \alpha$  et  $u(1) = \beta$  donnent  $u_0 = \alpha$  et  $u_{N+1} = \beta$ .

**Intérieur du domaine :** on s'intéresse à  $u_h := (u_i)_{i \in \llbracket 1:N \rrbracket} \in \mathbb{R}^N$ . Avec l'approximation

$$u^{(2)}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

il vient,

$$\forall i \in \llbracket 1 : N \rrbracket, -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i).$$

## Laplacien 1D

Ceci conduit à la résolution du système linéaire

$$A_h u_h = b_h$$

avec

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

## Questions

- 1- Le système admet-il une solution ? Si oui, est-elle unique ?
- 2- Quelle est la précision de la méthode ? La discrétisation devient-elle exacte quand  $h \rightarrow 0$  ? Les composantes de  $u_h$  convergent-elles vers la solution évaluée en les nœuds du maillage quand  $h \rightarrow 0$  ?

**Définition 1.4.5 – Norme matricielle subordonnée**

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^N$ . On pose

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

$$\|\cdot\|$$

ainsi définie est une norme sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , appelée norme matricielle subordonnée.

**Proposition 1.4.6 – Quelques propriétés**

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^N$ . Sa norme matricielle subordonnée vérifie :

- $\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$  ;
- $\forall (x, A) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$  ;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Exemple 1.4.3.**

Soit  $\|\cdot\|_\infty$  la norme infinie sur  $\mathbb{R}^N$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1:N \rrbracket} |x_i|$ . Sa norme matricielle subordonnée est définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \|A\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1:N \rrbracket} \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|$$

**Remarque 1.4.5.**

Pour l'étude des EDP, nous privilégierons des normes discrètes du type

$$\forall p > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\|_p = \left( h \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Elles renvoient à des discrétisations de normes définies sur des espaces fonctionnels ( $L_p$ ).



**Définition 1.4.7 – Norme  $\|\cdot\|_h$** 

On pose  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\|x\|_h = \sqrt{h \sum_{i=1}^N x_i^2}$ .  $\|\cdot\|_h$ , ainsi définie, est une norme sur  $\mathbb{R}^N$ .

De plus, sa norme matricielle subordonnée est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \|A\|_h = \sqrt{\rho(A^T A)},$$

avec  $\rho$  le rayon spectral d'une matrice.

**Proposition 1.4.8 – Propriété**

Soit  $hN = 1$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\|x\|_h \leq \|x\|_\infty$ .

Rappelons le système linéaire obtenu :

$$A_h u_h = b_h$$

avec

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout  $u_h \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} h^2 u_h^T A_h u_h &= 2u_1^2 - u_1 u_2 - u_2 u_1 + 2u_2^2 - u_2 u_3 - \dots - u_{N-1} u_N + 2u_N^2 \\ &= u_1^2 + (u_1 - u_2)^2 + \dots + (u_{N-1} - u_N)^2 + u_N^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

En conclusion le système admet une unique solution.

Soit  $u$  la solution de l'EDP (que l'on suppose exister et unique) alors pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, N\}$ .

$$-u''(x_i) - f(x_i) = 0.$$

### Définition 1.4.9 – Erreur de consistance

L'erreur de consistance du schéma numérique  $A_h u_h = b_h$  est

$$\xi_h(u) = A_h(\pi_h(u)) - b_h$$

où  $\pi_h(u) = (u(x_1), \dots, u(x_N))^T$ .

Cette erreur est ici

$$\begin{aligned} \xi_h(u)_i &= -\frac{u(x_{i-1}) - 2u_i(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} - f(x_i) \\ &= -\frac{u(x_{i-1}) - 2u_i(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + u''(x_i) - u''(x_i) - f(x_i) \\ &= u''(x_i) - \frac{u(x_{i-1}) - 2u_i(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} \\ &= -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i) \text{ avec } \xi_i \in ]x_{i-1}, x_{i+1}[. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 \|\xi_u(u)\|_\infty &= \max_i |\xi_h(u)_i| \\
 &= \max_i \left| \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i) \right| \\
 &\leq \left( \frac{1}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)| \right) h^2 \\
 &\leq Ch^2
 \end{aligned}$$

avec  $C \geq 0$  constante **indépendante de  $h$** . On dit que le schéma numérique est **consistant d'ordre 2** pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Montrons maintenant la convergence. On a

$$\begin{aligned}
 A_h u_h &= b_h \\
 A_h(\pi_h(u)) &= b_h + \xi_h(u)
 \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 u_h - \pi_h(u) &= A_h^{-1}(\xi_h(u)) \\
 \Rightarrow \|u_h - \pi_h(u)\|_\infty &\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|\xi_h(u)\|_\infty \leq \frac{C}{8} h^2.
 \end{aligned}$$

D'où la convergence. c.f. B. Lucquin, page 147, pour  $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$ .

Soit  $f$  donnée et continue sur  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \\ u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- On définit une grille sur  $\Omega$  :
  - $x_{i_1} = i_1 * h_1$ , avec  $h_1 = 1/(N_1 + 1)$ ;
  - $x_{i_2} = i_2 * h_2$ , avec  $h_2 = 1/(N_2 + 1)$ .
- On note  $u_{i_1, i_2}$  une approximation de  $u(x_{i_1}, x_{i_2})$ .
- On approxime les dérivées secondes en les nœuds du maillage par

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &\approx \frac{u_{i_1+1, i_2} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &\approx \frac{u_{i_1, i_2+1} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1, i_2-1}}{h_2^2}. \end{aligned}$$

On a donc les  $N_1 \times N_2$  inconnues  $(u_{i_1, i_2})$ , pour  $i_1 \in \{1, \dots, N_1\}$  et  $i_2 \in \{1, \dots, N_2\}$  vérifient les  $N_1 \times N_2$  équations

$$-\frac{u_{i_1-1, i_2} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1+1, i_2}}{h_1^2} - \frac{u_{i_1, i_2-1} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1, i_2+1}}{h_2^2} = f(x_{i_1, 1}, x_{i_2, 2}), \quad (1)$$

pour  $i_1 = 1, \dots, N_1$  et  $i_2 = 1, \dots, N_2$ ,

avec  $u_{i_1, i_2} = 0$  si  $i_1 \in \{0, N_1 + 1\}$  ou  $i_2 \in \{0, N_2 + 1\}$  (conditions aux limites).

Ce schéma s'appelle usuellement le schéma à 5 points du laplacien :

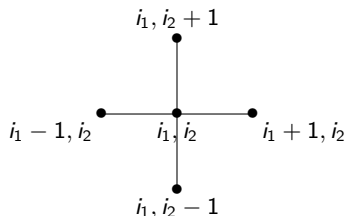


FIGURE 2 – *Stencil pour le laplacien, schéma à 5 points.*

On pose  $b_1 = \frac{1}{h_1^2}$ ,  $b_2 = \frac{1}{h_2^2}$  et  $a = 2(b_1 + b_2)$ , le système ?? s'écrit alors  $C_h u_h = b_h$

( $h = \max(h_1, h_2)$ ) avec  $u_h = (u_{1,1} \quad \dots \quad u_{1,N_2} \quad u_{2,1} \quad \dots \quad u_{2,N_2} \quad \dots \quad u_{N_1,N_2})^T$ ,

$$C_h = \begin{pmatrix} A & D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ D & A & D & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & D & A & D \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D & A \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -b_2 & a & -b_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -b_2 & a & -b_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -b_2 & a \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -b_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -b_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_{1,1}) \\ \vdots \\ f(x_{N_1,1}, x_{N_2,2}) \end{pmatrix}$$

On démontre alors, comme pour le cas 1D que la matrice  $C_h$  est symétrique, définie positive et qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|C_h\|_\infty \leq C$ . On en déduit alors que le schéma est consistant d'ordre 2 et convergent.

Que fait-on dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert borné du type de la figure ??

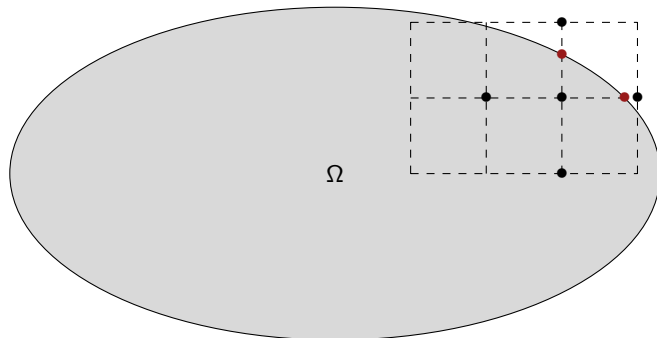


FIGURE 3 – Ouvert  $\Omega$  et modification du stencil pour les points proche de la frontière.

Dans ce cas le maillage ne tombe pas sur  $\Gamma = \partial\Omega$  en général. On a alors 2 stratégies :

- On applique la condition aux limite aux points proche de la frontière  $\Gamma$  ;
- On modifie le schéma à 5 points pour le laplacien afin que les points du maillage tombe sur la frontière (voir la figure ??)



Ce cours se base notamment sur les éléments suivants :

- B. Lucquin, Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Mathématiques à l'Université, Eds. Ellipses.
- Images et animation fournies par B. Ménétrier.