



Examen – Optimisation - EDP

1 Introduction

- Les deux parties sont à rédiger sur des feuilles séparées ;
- Documents autorisés : 1 page A4 recto verso manuscrite ;
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Un corrigé sera mis sous le **GitLab** dans la journée.

2 Partie I

▷ **Exercice 1.** (3 points) On cherche à prévoir pour le lendemain la valeur d'un indice noté PO de pollution à l'ozone en exploitant 2 prédicteurs potentiels constitués de prévisions d'un modèle météorologique à l'échéance de 24 heures des variables :

- T : la température de l'air à 2 mètres en $^{\circ}C$;
- FF : la force du vent à 10 mètres en m/s ;

On dispose de $n = 80$ valeurs de chacune des variables T, FF et PO (cf. la table 1).

i	1	2	...	80
PO	PO_1	PO_2	...	PO_{80}
T	T_1	T_2	...	T_{80}
FF	FF_1	FF_2	...	FF_{80}

TABLE 1 – *Données.*

On considère le modèle $PO(\beta, T, FF) = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 FF + \beta_3 T \cdot FF$.

1.1. Écrire le problème aux moindres carrés permettant d'estimer les paramètres $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ et β_3 . Le problème est-il un problème aux moindres carrés linéaire ? Si oui on donnera le vecteur \mathbf{y} et la matrice \mathbf{X} permettant d'écrire ce problème sous la forme

$$(P) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

▷ **Exercice 2.** (6 points) On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 2x_1^2 x_2 + 2x_2 \\ x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

2.1. Calculer $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$.

2.2. Donner le ou les points qui vérifient la condition nécessaire de solution du premier ordre.

2.3. Déterminer le/les minima locaux.

2.4. La fonction f est-elle convexe ?

▷ **Exercice 3.** (5 points) Soit λ est un réel strictement positif, on considère le problème suivant

$$(P) \begin{cases} \min f(\beta) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|\beta\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

3.1. Donner $\nabla f(\beta)$ et $\nabla^2 f(\beta)$.

3.2. Le problème est-il convexe ?

3.3. Caractériser la solution. Est-elle unique ?

3 Partie II

▷ **Exercice 4.** (3 points) On suppose que la fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction \mathcal{C}^4 sur le segment $[x - h_0, x + h_0]$, avec $h_0 > 0$.

4.1. En utilisant les développements limités de Taylor-Lagrange de $u(x + h)$ et de $u(x - h)$ démontrez qu'il existe

$$C \geq 0 \text{ t.q. } \forall h \in]0, h_0] \mid \left| \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h))}{h^2} - u^{(2)}(x) \right| \leq Ch^2$$

▷ **Exercice 5.** (5 points) Soit σ est une fonction donnée de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Pour une matrice W on note w_i la i^e ligne de cette matrice.

Un modèle à une couche (constituée de m neurones) d'un réseau de neurones est défini par

$$y: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{(n+1)m} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^m$$

$$(x, \beta) = (x, \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_m^T \\ b \end{pmatrix}) \longmapsto y(x, \beta) = \begin{pmatrix} \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \\ \vdots \\ \sigma(w_m \cdot x + b_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(\langle w_1^T, x \rangle + b_1) \\ \vdots \\ \sigma(\langle w_m^T, x \rangle + b_m) \end{pmatrix}.$$

5.1. Soit x^k fixé, calculer en fonction de la dérivée σ' la matrice jacobienne en β de la fonction $g_1(\beta) = y(x^k, \beta)$.

On considère maintenant l'application, toujours noté y

$$y: \quad \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^m$$

$$(x, W, b) \quad \longmapsto \quad y(x, W, b) = \sigma(Wx + b),$$

avec

$$\sigma: \quad \mathbb{R}^m \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^m$$

$$z \quad \longmapsto \quad \sigma(z) = \begin{pmatrix} \sigma(z_1) \\ \vdots \\ \sigma(z_m) \end{pmatrix}.$$

5.2. Soit x^k fixé et soit la fonction

$$\begin{aligned} g_2: \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (W, b) &\longmapsto g_2(W, b) = Wx^k + b. \end{aligned}$$

Calculer $g_2'(W, b) \cdot (H, h)$ (on précisera les espaces auxquels appartiennent H et h).

5.3. En déduire, en fonction de σ' ,

$$\frac{\partial y(x^k, \beta)}{\partial \beta} \cdot (H, h).$$

5.4. Quel lien pouvez-vous faire entre les questions 5.1 et 5.3