



## TD 2 – Calcul différentiel

### ▷ Exercice 1.

1.1. Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = \begin{bmatrix} y \cos x - z \sin x \\ x y z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ , et donner l'expression de  $f'$ .

### ▷ Exercice 2.

2.1. Soit  $L$  une application linéaire continue d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ . Exprimer  $L'(x)$  en fonction de  $L$ .

2.2. Soit  $B: E \times F \rightarrow G$  (evn), bilinéaire continue.  $\forall ((x, y), (u, v)) \in (E \times F)^2$ . On rappelle que  $B$  est continue si et seulement si il existe  $K$  tel que pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,  $\|B(x, y)\|_G \leq K\|x\|_E\|y\|_F$ . Donner l'expression de  $B'(x, y) \cdot (u, v)$  en fonction de  $B$ .

2.3. Calculer

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial B}{\partial y}(x, y).$$

2.4. Vérifier que

$$B'(x, y)(u, v) = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)u + \frac{\partial B}{\partial y}(x, y)v.$$

### ▷ Exercice 3.

3.1. Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\|x\|^2\right). \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^n$ , et calculer  $\nabla f(x)$  ainsi que la matrice hessienne  $\nabla^2 f(x)$  en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ .

▷ **Exercice 4.** Soient  $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , et soit l'application  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux fois dérivable. On considère l'application  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = \frac{1}{2} \langle A x(t) | x(t) \rangle - \langle b | x(t) \rangle. \end{aligned}$$

4.1. Montrer que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

4.2. Exprimer  $f'(t)$  et  $f''(t)$ .

▷ **Exercice 5.** Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\|$ .

**5.1.** Montrer que  $f$  est dérivable sur l'ouvert  $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$  et que  $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ .

**5.2.** Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en  $0_{\mathbb{R}^n}$ .

**5.3.** Montrer que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$  et donner  $\nabla^2 f$ .

*Sujets en ligne sous `moodle-n7.inp-toulouse.fr`*