

Optimisation

Chapitre 5 : Condition nécessaire, condition suffisante de solution

Joseph GERGAUD, Serge GRATTON & Daniel RUIZ

10 septembre 2024

Théorème 5.1.1

Soient Ω un ouvert d'un espace vectoriel normé E et f une application de Ω à valeurs dans \mathbb{R} . Si f admet un minimum local en x^* et si f est dérivable en x^* alors on a l'équation parfois appelée équation d'Euler

$$f'(x^*) = 0. \quad (1)$$

► Soit $h \in E$, comme Ω est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que la fonction

$$\begin{aligned} \varphi:]-\eta, \eta[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = f(x^* + th) \end{aligned}$$

soit bien définie. φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = f'(x^*).h$. Mais x^* est un minimum local de f , donc 0 est un minimum local de φ , par suite on a

$$0 \geq \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq 0.$$

Ainsi, pour tout h , $\varphi'(0) = f'(x^*).h = 0$. ■

Définition 5.1.2 – Point critique

Un point qui vérifie $f'(x) = 0$ est dit un point critique et sa valeur en f , $f(x)$ une valeur critique.

Théorème 5.1.3

Soient Ω un ouvert d'un espace vectoriel normé E et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ à valeur dans \mathbb{R} . Soit $C \subset \Omega$ convexe. Si f admet un minimum local en x^* sur C et si f est dérivable en x^* alors on a l'inéquation d'Euler

$$\forall y \in C, f'(x^*). (y - x^*) \geq 0. \quad (2)$$

► Soit $y \in C$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = f(x^* + t(y - x^*)) \end{aligned}$$

est bien définie et admet une dérivée à droite en 0 $\varphi'^+(0) = f'(x^*). (y - x^*)$. Mais 0 est un minimum local de φ et donc $\varphi(0) \leq \varphi(t)$ pour t suffisamment proche de 0. Par suite

$$\varphi'^+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq 0.$$



Remarque 5.1.1.

i) Si C est un sous espace affine ($C = x_0 + V$, avec V sous-espace vectoriel de E) alors l'inéquation d'Euler (2) devient

$$\forall h \in V, f'(x^*).h = 0$$

ii) Si $C = E$ alors l'inéquation d'Euler (2) devient l'équation d'Euler (1).

Théorème 5.1.4

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, Ω ouvert d'un espace vectoriel normé E et soit $C \subset \Omega$ convexe. On suppose que f est convexe sur C et dérivable en tout point de C , alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- i) x^* est un minimum global de f sur C .
- ii) x^* est un minimum local de f sur C .
- iii) Pour tout $y \in C$, $f'(x^*). (y - x^*) \geq 0$.

► (i) \Rightarrow (ii) est évident.

(ii) \Rightarrow (iii) est le théorème (3) précédent.

(iii) \Rightarrow (i) ?

f est convexe, par suite nous avons grâce à (iii)

$$f(y) \geq f(x^*) + f'(x^*). (y - x^*) \geq f(x^*).$$



Remarque 5.1.2. Si C est un ouvert convexe (iii)) est équivalent à $f'(x^*) = 0$. L'équation d'Euler est donc dans ce cas une condition nécessaire et suffisante de solution.

► **Correction.**

On considère le problème au moindres carrés linéaire

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(\beta) = \frac{1}{2} \|y - X\beta\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

Alors β^* est une solution de (P) si et seulement si ce point vérifie les équations normales

$$X^T X \beta = X^T y. \quad (3)$$



► le problème est un problème convexe et on a $\nabla f(\beta) = X^T X \beta - X^T y$. ■

Théorème 5.2.1 – Condition nécessaire du deuxième ordre

Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel normé E et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si x^* est un minimum local de f et si f est deux fois dérivable en x^* alors $f''(x^*)$ est semi-définie positive.

► Soit $h \neq 0$ un vecteur quelconque de E . x^* est un minimum local de f , donc $f'(x^*) = 0$ et il existe $\theta_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \theta < \theta_0$ on ait $f(x^*) \leq f(x^* + \theta h)$. f étant deux fois dérivable en x^* on a par Taylor-Young

$$\begin{aligned} f(x^* + \theta h) - f(x^*) &= f'(x^*).h + \frac{\theta^2}{2} f''(x^*).(h, h) + \|\theta h\|^2 \varepsilon(\theta h) \\ &= \frac{\theta^2}{2} (f''(x^*).(h, h) + 2\|h\|^2 \varepsilon(\theta h)) \geq 0. \end{aligned}$$

En divisant par θ^2 et en passant à la limite dans le membre de droite on en déduit que $f''(x^*).(h, h) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout h , on obtient le résultat. ■

Remarque 5.2.1. Il ne s'agit bien que d'une condition nécessaire (prendre $f(x) = x^3$).

Définition 5.2.2

Soit $B \in \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ une forme bilinéaire symétrique définie sur E , espace vectoriel normé.

i) B est dite semi-définie positive si et seulement si pour tout $h \in E$

$$B(h, h) \geq 0.$$

ii) B est dite définie positive si et seulement si pour tout $h \in E, h \neq 0$

$$B(h, h) > 0.$$

iii) B est uniformément définie positive ou elliptique si et seulement si il existe $c > 0$ tel que pour tout $h \in E$

$$B(h, h) \geq c\|h\|^2.$$

Remarque 5.2.2. Si E est un espace vectoriel de dimension fini il y a équivalence entre la définie positivité et l'ellipticité.

Théorème 5.2.3 – Condition suffisante du deuxième ordre

Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel normé E et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur Ω .

- i) Si x^* est un point de Ω tel que $f'(x^*) = 0$, f deux fois dérivable en x^* et $f''(x^*)$ elliptique, alors x^* est un minimum local de f .
- ii) Si f est deux fois dérivable sur Ω et s'il existe une boule $B(x^*, \eta) \subset \Omega$ telle que, pour tout $x \in B(x^*, \eta)$, $f''(x)$ est semi-définie positive et si $f'(x^*) = 0$, alors x^* est un minimum local de f .

► i) Pour tout h suffisamment petit

$$\begin{aligned} f(x^* + h) - f(x^*) &= \frac{1}{2} f''(x^*) \cdot (h, h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &\geq \frac{1}{2} (c + 2\varepsilon(h)) \|h\|^2. \end{aligned}$$

Par suite il existe $\eta > 0$ tel que pour tout h tel que $\|h\| < \eta$ on ait

$$f(x^* + h) - f(x^*) > 0.$$

- ii) Si pour tout $x \in B(x^*, \eta)$, $f''(x)$ est semi-positive, f est convexe sur l'ouvert $B(x^*, \eta)$. Par suite, comme $f'(x^*) = 0$, x^* est un minimum local de f .

Exercice 5.3.1. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 3x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2. \end{aligned}$$

1. Montrer que l'unique point critique de f est $\bar{x} = (0 \ 0)$.
2. La condition nécessaire de solution du deuxième ordre est-elle vérifiée ?
3. La condition suffisante de solution du deuxième ordre est-elle vérifiée ?
4. On fixe maintenant $d \in \mathbb{R}^2$ et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = f(\bar{x} + td). \end{aligned}$$

Montrer que $t = 0$ est un minimum local de φ .

5. Calculer $f(x_1, 2x_1^2)$. Conclusion.

Exercice 5.4.1. Attention à l'intuition dans \mathbb{R}

1. On considère une fonction f de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} dérivable en tout point. On suppose que f admette un minimum local en \bar{x} et que \bar{x} est l'unique point critique de f . Démontrer que \bar{x} est un minimum global de f .

2. On considère maintenant la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x_1^3 + 3e^{2x_2} - 6x_1e^{x_2} \end{aligned}$$

Montrer que $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ est l'unique point critique de f , que \bar{x} est un minimum local de f , mais que f n'admet pas de minimum global.

Exercice 5.4.2. Donner un exemple de fonction f (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}), deux fois dérivable, ayant un minimum strict en un point \bar{x} et telle que dans toute boule $\mathcal{B}(\bar{x}, \rho)$ il existe un point $x \in \mathcal{B}(\bar{x}, \rho)$ vérifiant $f''(x) < 0$.

Exercice 5.4.3. Donner un exemple de fonction f (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}), deux fois dérivable, ayant un minimum strict en un point \bar{x} et telle que dans toute boule $\mathcal{B}(\bar{x}, \rho)$ il existe un point $x \in \mathcal{B}(\bar{x}, \rho)$ vérifiant $f''(x) < 0$.



$$f(x) = \begin{cases} x^p(2 + \sin \frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

avec $p \geq 6$ pair.

