



TD 2 – Calcul différentiel

▷ Exercice 1.

1.1. Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = \begin{bmatrix} y \cos x - z \sin x \\ x y z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 , et donner l'expression de f' .

▷ Exercice 2.

2.1. Soit L une application linéaire continue d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Exprimer $L'(x)$ en fonction de L .

2.2. Soit $B: E \times F \rightarrow G$ (evn), bilinéaire continue. On rappelle que B est continue si et seulement si il existe K tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\|B(x, y)\|_G \leq K\|x\|_E\|y\|_F$. Supposons que la norme $\|(x, y)\|_{E \times F} = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}$. Pour $\forall ((x, y), (u, v)) \in (E \times F)^2$, donner l'expression de $B'(x, y).(u, v)$ en fonction de B .

2.3. Calculer

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial B}{\partial y}(x, y).$$

2.4. Vérifier que

$$B'(x, y)(u, v) = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)u + \frac{\partial B}{\partial y}(x, y)v.$$

▷ Exercice 3.

3.1. Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\|x\|^2\right). \end{aligned}$$

Montrer que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^n , et calculer $\nabla f(x)$ ainsi que la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

▷ **Exercice 4.** Soient $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, et soit l'application $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fois dérivable. On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = \frac{1}{2} \langle A x(t) | x(t) \rangle - \langle b | x(t) \rangle. \end{aligned}$$

4.1. Montrer que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

4.2. Exprimer $f'(t)$ et $f''(t)$.

▷ **Exercice 5.** Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$.

5.1. Montrer que f est dérivable sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et que $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

5.2. Montrer que f n'est pas dérivable en $0_{\mathbb{R}^n}$.

5.3. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et donner $\nabla^2 f$.