



TD 4 – Existence, unicité

▷ **Exercice 1.** Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+x_i}, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \langle b | x \rangle = 1, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où a et b sont des vecteurs fixés de $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

1.1. Montrer que (P) possède une solution.

1.2. Déterminer si la solution de (P) est unique.

▷ **Exercice 2.** Soit $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$. On rappelle que, par définition, A est dite *coercive* s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(Ax|x) \geq \alpha \|x\|^2$$

où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire euclidien standard sur \mathbb{R}^n . Montrer que A est définie positive si et seulement si A est coercive.

▷ **Exercice 3.** Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = (1/2) (Ax|x) + (b|x) + c \\ x \in \mathbb{R}^n \\ Cx = d \end{cases}$$

où $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $C \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $d \in \text{Im } C$. Donner une condition suffisante sur A assurant l'existence et l'unicité de solution à (P) .

▷ **Exercice 4.** Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(X) = (1/2) \|X - A\|^2 \\ X \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \end{cases}$$

où A est une matrice fixée dans $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne habituelle. Montrer que (P) possède une solution et une seule.