



## Examen – Optimisation - EDP

### 1 introduction

- Les deux parties sont à rédiger sur des feuilles séparées ;
- Documents autorisés : 1 page A4 recto verso manuscrite ;
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Un corrigé sera mis sous Moodle dans la journée.

### 2 Partie I

▷ **Exercice 1.** (5 points) La maquette d'un nouveau type d'éolienne est testé en soufflerie. 20 mesures sont réalisées entre 1 et 20  $m/s$ . L'allure de la réponse suggère un modèle à rupture (cf. la figure 1)

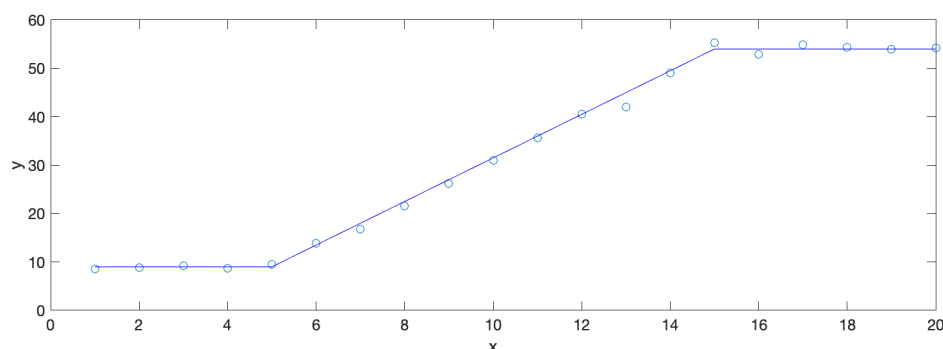


FIGURE 1 – Données et modèle pour une éolienne.

La production  $y$  est modélisée en fonction du vent généré dans la soufflerie  $x$  de la façon suivante : entre 1 et 5  $m/s$ , la réponse est supposée constante, elle augmente linéairement entre 5 et 15  $m/s$ , avant de saturer (redevenir constante) au delà de 15  $m/s$ . Il y a bien sur continuité de la réponse aux points 5 et 15  $m/s$

**1.1.** Écrire le modèle  $y(x, \beta)$  en fonction des plages des valeurs de  $x$ . Quelle est la dimension de  $\beta$ .

► Ici  $\beta \in \mathbb{R}^2$  et on a

— Modélisation 1

$$\begin{cases} y(x, \beta) = \beta_1 + 5\beta_2 & \text{si } x \leq 5 \\ y(x, \beta) = \beta_1 + \beta_2 x & \text{si } x \in [5, 15] \\ y(x, \beta) = \beta_1 + 15\beta_2 & \text{si } x \geq 15. \end{cases}$$

— Modélisation 2

$$\begin{cases} y(x, \beta) = \beta_1 & \text{si } x \leq 5 \\ y(x, \beta) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{10}(x - 5) + \beta_1 & \text{si } x \in [5, 10] \\ y(x, \beta) = \beta_2 & \text{si } x \geq 15. \end{cases}$$

**1.2.** Écrire le problème aux moindres carrés d'estimation des paramètres  $\beta$ . Ce problème est-il linéaire? Si oui on donnera le vecteur  $\mathbf{y}$  et la matrice  $\mathbf{X}$  permettant d'écrire le problème sous la forme

$$(P) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

► On a comme données 20 couples  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, 20}$ . Le problème aux moindres carrés s'écrit ici

$$(P) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|r(\beta)\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} r: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{20} \\ \beta &\longmapsto r(\beta) = \begin{pmatrix} r_1(\beta) \\ \vdots \\ r_{20}(\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

et  $r_i(\beta) = y_i - y(x_i, \beta)$ . Il s'agit bien d'un problème au moindre carrés linéaire avec  $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_{20})^T$  et où la  $i^{\text{e}}$  ligne de la matrice  $\mathbf{X}$  est

— Modélisation 1

$$\begin{cases} (1 \quad 5) & \text{si } x \leq 5 \\ (1 \quad x_i) & \text{si } x \in [5, 10] \\ (1 \quad 15) & \text{si } x \geq 15. \end{cases}$$

— Modélisation 2

$$\begin{cases} (1 \quad 0) & \text{si } x \leq 5 \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{x_i}{10} \quad -\frac{1}{2} + \frac{x_i}{10}\right) & \text{si } x \in [5, 10] \\ (0 \quad 1) & \text{si } x \geq 15. \end{cases}$$

► **Exercice 2.** (5 points) Soit  $a$  un point de  $\mathbb{R}^n$  et  $C$  un sous ensemble convexe, fermé et non vide de  $\mathbb{R}^n$ . On désire trouver le point de  $C$  le plus proche du point  $a$ . On cherche donc à résoudre le problème

$$(P) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|x - a\|^2 \\ x \in C \subset \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

**2.1.** Ce problème admet-il une solution? Si oui, est-elle unique?

► L'ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$  est fermé,  $f$  est continue et 0-coercive. Donc il existe une solution.

$C$  est convexe et  $f$  est strictement convexe car  $\nabla^2 f(x) = I$  est définie positive pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Par suite le problème est convexe avec  $f$  strictement convexe et le problème admet au plus une solution.

Conclusion : le problème admet une unique solution

**2.2.** Pouvez-vous donner des conditions nécessaire et/ou suffisantes de solutions CNS permettant de caractériser la solution.

► Le problème est convexe et le théorème (5.1.4) du cours polycopié donne une condition nécessaire et suffisante de solution :

$$\forall y \in C, \quad \langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle = \langle x^* - a, y - x^* \rangle; \geq 0.$$

**Remarque 1.** On ne peut pas utiliser ici la condition du premier ordre  $\nabla f(x^*) = 0$  car  $C$  n'est pas un ouvert.

### 3 Partie II

▷ **Exercice 3.** (5 points)

On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 \cos x_2 \\ x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

**3.1.** Donnez et résolvez la condition nécessaire du premier ordre de solution.

► La condition du premier ordre s'écrit ici

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + \cos x_2 \\ -x_1 \sin x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Les points qui vérifient ceci sont

- $x_k^* = (0, \pi/2 + k\pi)$  ;
- $\bar{x}_k = ((-1)^{k+1}, k\pi)$ .

**3.2.** Déterminez si les points précédents sont des minima locaux.

► On a

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin x_2 \\ -\sin x_2 & -x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla^2 f(x_k^*) = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

qui possède une valeur propre strictement négative. Par suite ces points ne sont pas des minima locaux.

Par contre

$$\nabla^2 f(\bar{x}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

possède une seule valeur propre strictement positive. Par suite ces points sont des minima locaux.

▷ **Exercice 4.** (5 points)

On considère le problème aux moindres carrés suivants :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \|r(\beta)\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

**4.1.** Rappelez l'itération de Gauß-Newton pour résoudre ce problème.

► À chaque itération on résout

$$(P_k) \begin{cases} \min q^{(k)}(s) = \frac{1}{2} \|r(\beta^{(k)}) + J_r(\beta^{(k)})s\|^2 \\ s \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

$s$  est solution de ce problème si et seulement si

$$J_r(\beta^{(k)})^T J_r(\beta^{(k)})s = -J_r(\beta^{(k)})^T r(\beta^{(k)}).$$

et on pose  $\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + s$ .

**4.2.** Que se passe-t-il si à un itéré  $k$  on a  $J_r(\beta^{(k)})$  qui n'est pas de rang  $p$ .

► Dans ce cas  $J_r(\beta^{(k)})^T J_r(\beta^{(k)})$  n'est pas inversible et on a une infinité de solution pour le problème  $(P_k)$

**4.3.** Pour pallier à cette difficulté on considère à l'itéré  $k$ , pour  $\lambda$  strictement positif fixé, le problème suivant

$$(P_k) \begin{cases} \min q^{(k)}(s) = \frac{1}{2} \|r(\beta^{(k)}) + J_r(\beta^{(k)})s\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|s\|^2 \\ s \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

1. Donner la condition nécessaire du premier ordre de solution de ce problème  $(P_k)$ .
2. Cette condition est-elle aussi suffisante ?

►

1.

$$\nabla q^{(k)}(s) = J_r(\beta^{(k)})^T J_r(\beta^{(k)})s + J_r(\beta^{(k)})^T r(\beta^{(k)}) + \lambda s = 0.$$

2. La condition nécessaire du premier ordre est une condition nécessaire et suffisante. En effet le problème est convexe car la matrice hessienne  $\nabla^2 q^{(k)}(s) = J_r(\beta^{(k)})^T J_r(\beta^{(k)}) + \lambda I$  est définie positive pour tout  $s$ .