



# Examen – Optimisation - EDP - cas Covid

## 1 introduction

- Documents autorisés : 1 page A4 recto verso manuscrite ;
- Le barème est donné à titre indicatif.

▷ **Exercice 1.** (8 points) On considère, pour  $a > b > 0$ , le problème

$$(P) \begin{cases} \min f(\theta, z) = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)/z^2 + z^2 \\ (\theta, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

1.1. Résoudre la condition nécessaire du premier ordre du problème  $(P)$ .

1.2. Parmi les points de la question précédente, quels sont ceux qui sont des minima locaux ?

1.3. Le problème  $(P)$  est-il un problème convexe ?

- 1.4. 1. Montrer que l'on peut supposer que  $z \geq z_0$ , avec  $z_0 > 0$  suffisamment petit.  
2. En déduire l'existence de solutions et donner ces solutions.

▷ **Exercice 2.** (7 points) On considère deux nuages de points représentant des carrés, cf. figure 1, et on désire connaître la meilleure transformation affine (c'est-à-dire la composition d'une application linéaire et d'une translation) qui lie les deux nuages de points.

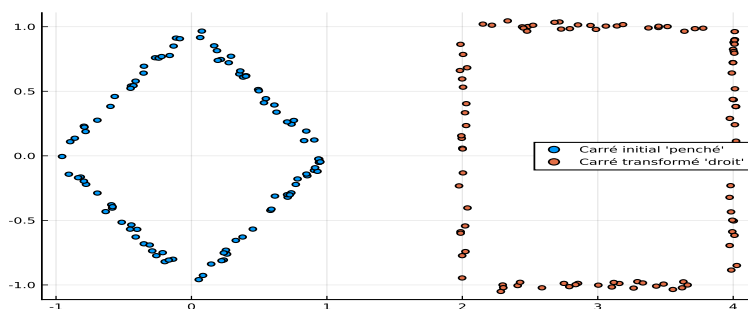


FIGURE 1 – Nuages de points représentant 2 carrés, en bleu les points de  $X$  et en orange les points de  $Y$ .

Nous avons donc comme données  $X = (x_{ij})$  et  $Y = (y_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, 2$  où  $n$  représente le nombre de points dans chaque carré et les colonnes de  $X$  et  $Y$  sont les première et deuxième coordonnées des points des carrés. L'indice  $i$  identifie les points en correspondance des 2 carrés. Quant-à la transformation affine  $u$  elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto u(x) = Ax + b. \end{aligned}$$

**2.1.** On considère le critère aux moindres carrés. Écrire le problème d'optimisation qui formalise le problème d'estimation des paramètres.

**2.2.** Le problème d'optimisation est-il un problème d'optimisation aux moindres carrés linéaire ? Si oui on donnera le vecteur  $\mathbf{y}$  et la matrice  $\mathbf{Z}$  permettant d'écrire le problème sous la forme

$$\min_{\beta=(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1,b_2)^T} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta\|_2^2.$$

▷ **Exercice 3.** (5 points)

On considère le problème d'optimisation sans contrainte suivant

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = c^T x - \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i^T x) \\ x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, b_i - a_i^T x > 0 \ \forall i = 1, \dots, m\}, \end{cases}$$

avec

- $b_i \in \mathbb{R}$  et  $a_i \in \mathbb{R}^n$  fixés pour tout  $i = 1, \dots, m$ ;
- $c \in \mathbb{R}^n$  fixé.

**3.1.** On pose pour  $i$  fixé  $f_i(x) = \ln(b_i - a_i^T x)$ . En utilisant la dérivation des fonctions composées donnez la matrice jacobienne de  $f_i$  en  $x$ ,  $J_{f_i}(x)$ . En déduire  $\nabla f(x)$

**3.2.** Calculer la matrice hessienne de  $f$  en  $x$ ,  $H_f(x)$ .

**3.3.** On désire résoudre ce problème en appliquant l'algorithme de Newton en partant d'un point  $x^{(0)}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Écrire l'itération courante et donner la dimension du système linéaire obtenu.