



Examen – Optimisation - EDP

1 introduction

- Les deux parties sont à rédiger sur des feuilles séparées ;
- Documents autorisés : 1 page A4 recto verso manuscrite ;
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Un corrigé sera mis sous Moodle dans la journée.

2 Partie I

- ▷ **Exercice 1.** (5 points) La maquette d'un nouveau type d'éolienne est testé en soufflerie. 20 mesures sont réalisées entre 1 et 20 m/s . L'allure de la réponse suggère un modèle à rupture (cf. la figure 1)

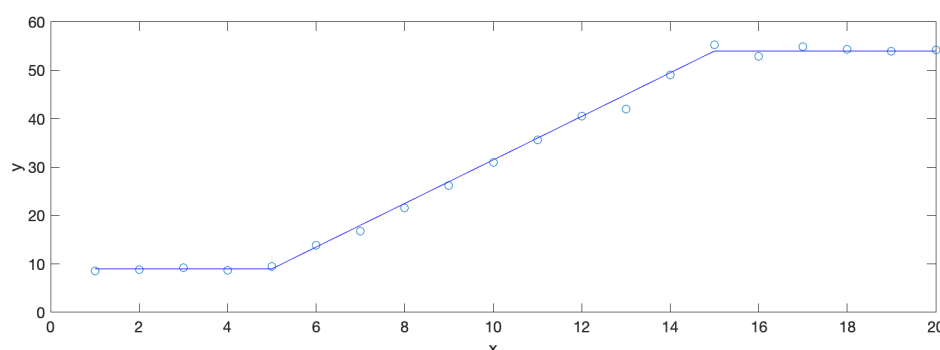


FIGURE 1 – Données et modèle pour une éolienne.

La production y est modélisée en fonction du vent généré dans la soufflerie x de la façon suivante : entre 1 et 5 m/s , la réponse est supposée constante, elle augmente linéairement entre 5 et 15 m/s , avant de saturer (redevenir constante) au delà de 15 m/s . Il y a bien sur continuité de la réponse aux points 5 et 15 m/s

1.1. Écrire le modèle $y(x, \beta)$ en fonction des plages des valeurs de x . Quelle est la dimension de β .

1.2. Écrire le problème aux moindres carrés d'estimation des paramètres β . Ce problème est-il linéaire ? Si oui on donnera le vecteur \mathbf{y} et la matrice \mathbf{X} permettant d'écrire le problème sous la forme

$$(P) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

- ▷ **Exercice 2.** (5 points) Soit a un point de \mathbb{R}^n et C un sous ensemble convexe, fermé et non vide de \mathbb{R}^n . On désire trouver le point de C le plus proche du point a . On cherche donc à résoudre le problème

$$(P) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|x - a\|^2 \\ x \in C \subset \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

2.1. Ce problème admet-il une solution ? Si oui, est-elle unique ?

2.2. Pouvez-vous donner des conditions nécessaire et/ou suffisantes de solutions CNS permettant de caractériser la solution.

3 Partie II

- ▷ **Exercice 3.** (5 points)

On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 \cos x_2 \\ x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

3.1. Donnez et résolvez la condition nécessaire du premier ordre de solution.

3.2. Déterminez si les points précédents sont des minima locaux.

- ▷ **Exercice 4.** (5 points)

On considère le problème aux moindres carrés suivants :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \|r(\beta)\|^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

4.1. Rappelez l'itération de Gauss-Newton pour résoudre ce problème.

4.2. Que se passe-t-il si à un itéré k on a $J_r(\beta^{(k)})$ qui n'est pas de rang p .

4.3. Pour pallier à cette difficulté on considère à l'itéré k , pour λ strictement positif fixé, le problème suivant

$$(P_k) \begin{cases} \min q^{(k)}(s) = \frac{1}{2} \|r(\beta^{(k)}) + J_r(\beta^{(k)})s\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|s\|^2 \\ s \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

1. Donner la condition nécessaire du premier ordre de solution de ce problème (P_k) .
2. Cette condition est-elle aussi suffisante ?