

Modélisation & Calcul Scientifique

Partie 1 : Rappels de calcul différentiel

Partie 2 : Équations différentielles ordinaires

Évaluation : un examen écrit et notebook Julia

Joseph GERGAUD
gergaud@enseeiht.fr

6 septembre 2022

<http://gergaud.perso.enseeiht.fr/teaching/index.html>

Le répertoire `julia` contient :

- `notebook_Julia.pdf` : un pdf d'introduction à Julia ;
- `intro-julia.ipynb` : un notebook d'introduction à Julia ;
- `ode-exemple-sol.ipynb` : une introduction à l'intégration numérique avec Julia.

Modélisation & Calcul Scientifique

Partie 1 : Rappels de calcul différentiel

Joseph GERGAUD

6 septembre 2022



INP
TOULOUSE

ENSEEIH



INSA

INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
TOULOUSE

Dans cette partie nous ferons des rappels sur le calcul différentiel :

- Définitions
- Développement limité d'une fonction de plusieurs variables
- Notions de Gradient, matrice jacobienne, matrice hessienne, opérateur laplacien, etc.
- Formule de green-Ostrogradsky, intégration par partie pour les fonctions à plusieurs variables

Définition 3.1.1 – Dérivée d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Une fonction d'une seule variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} est dérivable en tout point x de \mathbb{R} s'il existe un nombre réel a noté $f'(x)$ tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a .$$

Définition 3.1.2 – Dérivée au sens de Fréchet

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit f une application définie sur le domaine $D \subset E$ et à valeurs dans F . L'application f est dite **F-différentiable** (ou différentiable au sens de Fréchet, ou encore différentiable au sens fort) en un point \mathbf{x} de l'intérieur du domaine D , s'il existe un opérateur linéaire continu $f'(\mathbf{x})$ de E dans F ($f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E, F)$), tel que

$$\forall \mathbf{h} \in E , \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|_E \varepsilon(\mathbf{h}) , \quad \text{avec} \quad \lim_{\|\mathbf{h}\|_E \rightarrow 0} \|\varepsilon(\mathbf{h})\|_F = 0 . \quad (1)$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ les bases étant choisies dans ces espaces, on peut associer à l'application linéaire $f'(\mathbf{x})$ une matrice notée $J_f(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}): \quad E &\longrightarrow F \\ \mathbf{h} &\longmapsto f'(\mathbf{x}).\mathbf{h} = J_f(\mathbf{x}) \times \mathbf{h} \end{aligned}$$

Définition 3.1.3 – Matrice jacobienne

Une base dans les espaces de départ et d'arrivée étant choisi, on appelle matrice jacobienne la matrice vérifiant

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad f'(\mathbf{x}).\mathbf{h} = J_f(\mathbf{x}) \times \mathbf{h}.$$

Proposition 3.1.4

Si l'application f est F -différentiable (dérivable) au point \mathbf{x} , elle est alors continue au point \mathbf{x} .

Définition 3.1.5

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $\Omega \subset E$ un ouvert de E . On dit que **l'application** $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ **est dérivable dans** Ω si elle est dérivable en tout point \mathbf{x} de Ω . On peut alors définir l'application

$$f' : \mathbf{x} \in \Omega \subset E \rightarrow f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E, F) ,$$

appelée **application dérivée de** f . Si l'application dérivée $f' : \Omega \subset E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est continue, on dit que **l'application** $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ **est (une fois) continûment dérivable dans** Ω , et on écrit

$$f \in \mathcal{C}^1(\Omega) .$$

Exercice 3.1.1. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto Ax + b \end{aligned}$$

Donner, à l'aide la définition $f'(x).h$, $f'(x)$ et $J_f(x)$

Exercice 3.1.1. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + c \end{aligned}$$

Donner, à l'aide la définition $f'(x).h$, $f'(x)$ et $J_f(x)$

Exercice 3.1.1. On pose $\mathcal{C}(E, F)$ l'ensemble des fonctions continue d'un espace vectoriel normé E compact muni de la norme $\|f\|_\infty = \text{Max}_{x \in E} \|f(x)\|_F$ à valeurs dans un espace vectoriel normé F et on considère x_0 fixé dans E . On définit

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \mathcal{C}(E, F) & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f(x_0) \end{array}$$

Donner, à l'aide la définition $\Phi'(f).h$ et $\Phi'(f)$

Exercice 3.1.1. Soit L une application linéaire et continue d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Donner, à l'aide la définition $L'(x).h$ et $L'(x)$.

Donc $f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ que l'on peut identifier via l'isométrie linéaire entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ et F

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) & \longrightarrow & F \\ T & \longmapsto & T(1) \end{array} .$$

Avec cette identification on a $f'(\mathbf{x}) \in F$ et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h) - f(\mathbf{x})}{h} = f'(\mathbf{x}),$$

et

$$f'(\mathbf{x}).h = hf'(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Remarque 3.1.1. Dans l'équation ci-dessus, le terme $f'(\mathbf{x})$ de gauche est une fonction de \mathbb{R} dans F alors que le terme de droite est un vecteur de F . Si de plus $F = \mathbb{R}$ alors ce vecteur de \mathbb{R} est tout simplement le nombre dérivée habituel.

Définition 3.1.6 – Gradient

On appelle gradient de la fonction f en \mathbf{x} de \mathbf{H} , espace de Hilbert, à valeur dans \mathbb{R} l'unique vecteur de \mathbf{H} , noté $\nabla f(\mathbf{x})$, tel que

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbf{H}, \quad f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle$$

Exemple 3.1.2.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\longmapsto \frac{1}{2} \|y - X\beta\|^2 \end{aligned}$$

La donnée d'une application

$$f : \Omega \subset E \rightarrow F = \prod_{i=1}^p F_i$$

revient à se donner p applications composantes $f_i : \Omega \subset E \rightarrow F_i$, $1 \leq i \leq p$, de telle façon que

$$\forall \mathbf{x} \in E, \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{x}) \end{pmatrix} .$$

Proposition 3.1.7

On établit facilement que **l'application f est dérivable en un point $\mathbf{a} \in \Omega$ si et seulement si chaque application composante l'est aussi**, et on a alors :

$$f'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f'_1(\mathbf{a}) \\ f'_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f'_p(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \quad \text{avec } f'_i(\mathbf{a}) \in \mathcal{L}(E, F_i), \quad 1 \leq i \leq p .$$

Considérons ensuite une application

$$f : \Omega \subset \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow F$$

où Ω est un ouvert de $\prod_{i=1}^n E_i$. Soit \mathbf{a} un point de Ω de composantes (a_1, a_2, \dots, a_n) , et soit $k \in (1, 2, \dots, n)$ l'un des indices.

Soit $\Omega_i, i = 1, \dots, n$ des ouverts des E_i tels que $\prod_{i=1}^n \Omega_i \subset \Omega$. On définit alors la k -ième **application partielle**

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k \subset E_k & \longrightarrow & F \\ x_k & \longrightarrow & f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \end{array} \quad .$$

Définition 3.1.8 – Dérivée partielle

On appelle dérivée partielle de f au point \mathbf{a} par rapport à la k -ième variable la dérivée, si elle existe de l'application partielle au point $a_k \in \Omega_k \subset E_k$, on note

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \in \mathcal{L}(E_k, F)$$

cette dérivée partielle.

Théorème 3.1.9

Soit

$$f : \Omega \subset \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow F$$

- Si f est dérivable en $\mathbf{a} \in \Omega$, alors f admet n dérivées partielles $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}$, pour $i = 1, \dots, n$ et on a

$$f'(\mathbf{a})h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} h_i.$$

- Si f admet n dérivées partielles dans un voisinage de $\mathbf{a} \in \Omega$ continues en \mathbf{a} , alors f est dérivable en \mathbf{a} et on a

$$f'(\mathbf{a})h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} h_i.$$

- Si f est une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ouvert à valeurs dans \mathbb{R}^m dérivable en $\mathbf{a} \in \Omega$ alors sa matrice jacobienne d'écrit

$$f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} .$$

- Si $p = 1$ alors le gradient de f en \mathbf{a} s'écrit

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} .$$

- **Exemple 3.1.3.**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2} \|x\|^2. \end{aligned}$$

▪ **Exemple 3.1.3.**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2} \|x\|^2. \end{aligned}$$

▪ **Exemple 3.1.4.**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cos x_1 - x_3 \sin x_1 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

▪ **Exemple 3.1.3.**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2} \|x\|^2. \end{aligned}$$

▪ **Exemple 3.1.4.**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cos x_1 - x_3 \sin x_1 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

▪ **Exemple 3.1.5.** Soit E, F et G 3 espaces vectoriels normés et

$$\begin{aligned} B: E \times F &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto B(x, y) \end{aligned}$$

une application bilinéaire continue

À l'aide la définition calculer $B'(x, y)(h, k)$.

Calculer

$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B(x, y)}{\partial y}.$$

Écrire $B'(x, y)$ à l'aide des dérivées partielles

$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B(x, y)}{\partial y}.$$

Théorème 3.1.10 – Théorème des fonctions composées

Soient E , F , et G , trois espaces vectoriels normés. Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ une application dérivable en un point $\mathbf{x} \in \Omega$ (Ω ouvert de E), et soit $g : \tilde{\Omega} \subset F \rightarrow G$ une application dérivable au point $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \tilde{\Omega}$ ($\tilde{\Omega}$ ouvert de F). On suppose $f(\Omega) \subset \tilde{\Omega}$. Alors l'application composée

$$g \circ f : \Omega \subset E \rightarrow G$$

est dérivable au point $\mathbf{x} \in \Omega$ et

$$\forall \mathbf{h} \in E, \quad (g \circ f)'(\mathbf{x}).\mathbf{h} = g'(f(\mathbf{x})).(f'(\mathbf{x}).\mathbf{h}).$$

Proposition 3.1.11 – Cas de la dimension finie

Si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ et $G = \mathbb{R}^p$, on a

$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = J_g(\mathbf{y}) \times J_f(\mathbf{x}) = J_g(f(\mathbf{x})) \times J_f(\mathbf{x}).$$

Exemple 3.1.6.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\longmapsto \frac{1}{2} \|y - X\beta\|^2. \end{aligned}$$

Définition 3.1.12 – Dérivée seconde

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ une application dérivable sur l'ouvert $\Omega \subset E$. Si l'application dérivée

$$f' : \Omega \subset E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

est elle même dérivable (i.e. F -différentiable) en un point $\mathbf{x} \in \Omega$, sa dérivée, notée

$$f''(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} (f')'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) ,$$

est appelée **dérivée seconde de l'application f au point \mathbf{x}** , et on dit que **l'application f est deux fois dérivable au point \mathbf{x}** .

Notation : Il est facile de remarquer que l'application

$$\mathbf{B} : (\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in E \times E \rightarrow ((f''(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}) \cdot \mathbf{k}) \in F ,$$

est linéaire séparément en chacune des variables \mathbf{h} et \mathbf{k} , et est de ce fait **bilinéaire**. On identifie l'application dérivée seconde de f au point \mathbf{x} , $f''(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, à une application de l'espace $\mathcal{L}_2(E \times E, F)$, espace des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F . On écrira alors

$$\forall \mathbf{h}, \mathbf{k} \in E , \quad f''(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = (f''(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}) \cdot \mathbf{k}.$$

Proposition 3.1.13

Si l'application $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ est deux fois dérivable au point \mathbf{x} de l'ouvert $\Omega \subset E$, alors l'application dérivée seconde de f au point \mathbf{x} est une **application bilinéaire symétrique** en ce sens que

$$\forall \mathbf{h}, \mathbf{k} \in E, \quad f''(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = f''(\mathbf{x})(\mathbf{k}, \mathbf{h}).$$

Définition 3.1.14 – Application dérivée seconde

On dit que l'**application** $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ est **deux fois dérivable dans** Ω si elle est deux fois dérivable en tout point \mathbf{x} de Ω . On peut alors définir l'**application dérivée seconde de** f

$$f'' : \mathbf{x} \in \Omega \subset E \rightarrow f''(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_2(E \times E, F) .$$

Si cette dernière application est continue, l'application f est dite **deux fois continûment dérivable dans** Ω , et on écrit

$$f \in \mathcal{C}^2(\Omega) .$$

Remarque 3.1.2. En ce qui concerne le **calcul** effectif des dérivées secondes, on utilise le résultat suivant, qui permet de se ramener à des calculs de dérivées premières : étant donné deux vecteurs quelconques $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in E$, l'élément $f''(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in F$ est égal à la dérivée au point $\mathbf{x} \in \Omega$ de l'application $\mathbf{v} \in \Omega \rightarrow f'(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} \in F$, appliquée au vecteur \mathbf{h} .

Remarque 3.1.3. Cas où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Si f est une application de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} alors $f''(\mathbf{a})$ est une forme bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} . On peut alors lui associer une matrice (n, n) appelée matrice hessienne

$$H_f(\mathbf{a}) = \nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

et on a

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n, f''(\mathbf{a}).(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{h}^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{k}.$$

Théorème 3.1.15 – Formules de Taylor pour les applications une fois dérivables

Soient $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ et $[a, a + h]$ un segment fermé contenu dans Ω ouvert.

i) Si f est dérivable en a , alors

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \|h\|_E \varepsilon(h) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim_{\|h\|_E \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\|_F = 0 \quad .$$

ii) **Formule des accroissements finis** : si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et f est dérivable en tout point du segment ouvert $]a, a + h[$, alors

$$\|f(a + h) - f(a)\|_F \leq \sup_{x \in]a, a+h[} \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|h\|_E \quad .$$

iii) **Formule de Taylor-Maclaurin** : si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et f est dérivable en tout point du segment ouvert $]a, a + h[$, et si $F = \mathbb{R}$, alors

$$\exists \theta \in]0, 1[\quad \text{tel que} \quad f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h) \cdot h \quad .$$

iv) **Formule de Taylor avec reste intégral** : si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et F est complet, alors

$$f(a + h) = f(a) + \int_0^1 (f'(a + th) \cdot h) dt \quad .$$

Théorème 3.1.16 – Formules de Taylor pour les appli. deux fois dérivables

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ et $[a, a + h]$ un segment fermé contenu dans Ω (Ω ouvert de E).

i) **Formule de Taylor-Young** : si f est dérivable dans Ω , et si f est deux fois dérivable au point a , alors

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2} f''(a)(h, h) + \|h\|_E^2 \varepsilon(h) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim_{\|h\|_E \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\|_F = 0 .$$

ii) **Formule des accroissements finis généralisée** : si $f \in C^1(\Omega)$ et f est deux fois dérivable en tout point du segment ouvert $]a, a + h[$, alors

$$\|f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h\|_F \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in]a, a+h[} \|f''(x)\|_{\mathcal{L}_2(E \times E, F)} \|h\|_E^2 .$$

iii) **Formule de Taylor-Maclaurin** : si $f \in C^1(\Omega)$ et f est deux fois dérivable en tout point du segment ouvert $]a, a + h[$, et si $F = \mathbb{R}$, alors

$$\exists \theta \in]0, 1[\quad \text{tel que} \quad f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2} f''(a + \theta h)(h, h) .$$

iv) **Formule de Taylor avec reste intégral** : si $f \in C^2(\Omega)$ et F est un espace complet, alors

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \int_0^1 (1 - t)(f''(a + th)(h, h)) dt .$$

Pour illustrer ces considérations, voici trois façons équivalentes d'écrire (par exemple) la formule de Taylor-Young pour une fonctionnelle $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable :

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|_2^2 \varepsilon(\mathbf{h})$$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \varepsilon(\mathbf{h})$$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + (\nabla f(\mathbf{a}))^T \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{h} \varepsilon(\mathbf{h})$$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) + \mathbf{h}^T \mathbf{h} \varepsilon(\mathbf{h}).$$

où $q_{\mathbf{a}}$ est une forme quadrique généralisée.

On rappelle ici les développements de Taylors. Soit $f : \Omega \in E \rightarrow F$, une fonction, Ω ouvert, E et F espaces vectoriels normés. On suppose f de classe C^k . On rappelle que

- $f'(x)$ est une application linéaire continue : $f'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\begin{aligned} f'(x): \quad E &\longrightarrow F \\ h &\longmapsto f'(x).h \end{aligned}$$

- $f''(x)$ est une application bilinéaire continue : $f''(x) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \equiv \mathcal{L}_2(E, F)$

$$\begin{aligned} f''(x): \quad E \times E &\longrightarrow F \\ (h_1, h_2) &\longmapsto f''(x).(h_1, h_2) \end{aligned}$$

- $f^{(k)}(x)$ est une application k -linéaire continue : $f^{(k)}(x) \in \mathcal{L}_k(E, F)$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x): \quad E^k &\longrightarrow F \\ (h_1, \dots, h_k) &\longmapsto f^{(k)}(x).(h_1, \dots, h_k) \end{aligned}$$

Théorème 3.2.1

Soit $f : \Omega \in E \rightarrow F$ une fonction C^{k+1} et x_0 et $x_0 + h$ deux points de Ω tels que $[x_0, x_0 + h] \in \Omega$ alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + \frac{1}{2}f''(x_0).(h, h) + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0).\underbrace{(h, \dots, h)}_{k \text{ fois}} + r_k(h),$$

$$\text{avec } \|r_k(h)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|f^{(k+1)}(x_0 + th)\| \frac{\|h\|^{k+1}}{(k+1)!} \leq M \frac{\|h\|^{k+1}}{(k+1)!} = \mathcal{O}(\|h\|^{k+1})$$

Si $E = \mathbb{R}$, on identifie $f^{(k)}(x) \equiv f^{(k)}(x).(1, \dots, 1) \in F$.

Théorème 3.2.2 – Cas où $E = \mathbb{R}$

Si $x : [t_0, t_f] \rightarrow F$ est C^k et $(k+1)$ fois différentiable sur $]t_0, t_f[$ et telle que $\|x^{(k+1)}(t)\| \leq M, \forall t_0 < t < t_f$ alors

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0).h + \dots + x^{(k)}(t_0)\frac{h^k}{k!} + r_k(t),$$

$$\text{avec } \|r_k(t)\| \leq \frac{M}{(k+1)!}h^{k+1} = \mathcal{O}(h^{k+1})$$