



**MODIA - Modélisation et Calcul  
Scientifique**  
**Examen écrit d'équations différentielles ordinaires**  
**- Durée 1h30**  
**Documents autorisés : 1 feuille A4 manuscrite**  
**recto-verso**

▷ **Exercice 1.** (6 points)

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = 2t(1 + x(t)) \\ x(0) = x_0 = 0. \end{cases}$$

**1.1.** Donner la fonction  $f$  qui permet d'écrire l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

**1.2.** L'équation différentielle est-elle autonome ? Est-elle linéaire ?

**1.3.** Montrer que la solution du problème de Cauchy est  $\varphi(t) = e^{t^2} - 1$ .

**1.4.** On pose  $x^{(0)}$  la fonction

$$\begin{aligned} x^{(0)} : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ t &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

On définit

$$x^{(n+1)}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^{(n)}(s)) ds.$$

Calculer  $x^{(1)}(t)$ ,  $x^{(2)}(t)$  et  $x^{(3)}(t)$ .

**1.5.** 1. Pour  $t$  suffisamment proche de 0, vers quoi tend  $x^{(n)}(t)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (justifiez votre réponse) ?

2. On note  $x^*(t)$  cette limite. La convergence de  $x^{(n)}$  vers  $x^*$  est-elle uniforme (justifiez votre réponse) ?

▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère le modèle de FitzHugh-Naguma[?] qui donne l'évolution en fonction du temps du voltage à travers la membrane d'un axone :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = c(x_1(t) - x_1^3(t)/3 + x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -(1/c)(x_1(t) - a + bx_2(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où

- $x_1$  est le voltage ;
- $x_2$  est la variable de recouvrement (modélise les courants extérieurs) ;
- $\theta = (a, b, c)$  sont les paramètres du modèle

**2.1.** On note  $x(t, x_0, \theta_0)$  la solution en  $t$  du problème (IVP). Quelle est la dimension de

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(t, x_0, \theta_0)?$$

**2.2.** On suppose connue la solution  $x(t, x_0, \theta_0)$  pour les valeurs fixées de  $x_0$  et de  $\theta_0$ . Donnez l'équation variationnelle dont est solution

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(\cdot, x_0, \theta_0).$$

On donnera les dimensions des matrices  $A(t)$  et  $B(t)$  et on explicitera celles-ci en fonction de  $x(t, x_0, \theta_0)$  et de  $\theta_0$ .

▷ **Exercice 3.** (8 points) On considère la méthode à un pas suivante

$$x_1 = x_0 + h(\alpha f(t_0, x_0) + \beta f(t_0 + h/2, x_0 + (h/2)f(t_0, x_0)) + \gamma f(t_0 + h, x_0 + hf(t_0, x_0))).$$

**3.1.** Montrer que c'est un schéma de Runge-Kutta. On donnera le nombre d'étages et le tableau de Butcher de la table 1.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

**3.2.** On donne les tableaux de Butcher pour les schémas d'Euler, du point milieu et des trapèzes.

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \text{Euler} & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \\ \hline \text{point milieu} & & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \\ \hline \text{trapèze} & & \end{array}$$

TABLE 2 – *Schémas de Runge-Kutta classiques.*

Pour quelles valeurs du triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  retrouve-t-on

- la méthode d'Euler ;
- la méthode du point milieu ;
- la méthode des trapèzes.

**3.3.** Quelles relations doivent satisfaire le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  pour que la méthode soit

- constante ;
- d'ordre  $\geq 1$  ;
- d'ordre  $\geq 2$ .

On effectuera les calculs dans le cas où  $x(t) \in \mathbf{R}$ .

**3.4.** On considère maintenant dans  $\mathbf{R}$  le problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Donner  $x_1$  en fonction de  $x_0$  et de  $h$ . En déduire que cette méthode ne peut être d'ordre 3.