



TD 2 – Convexité - coercivité

▷ **Exercice 1.** Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1.1. Montrer que toute application norme, définie sur E , est convexe sur E . Que dire de la stricte convexité ?

1.2. Soient f et g deux applications convexes sur C , convexe de E . Montrer que $\forall \lambda \geq 0, \forall \mu \geq 0, \lambda f + \mu g$ est une application convexe sur C .

1.3. Soient $(f_i)_{i \in I}$, I fini, une famille d'applications convexes définies sur un convexe C de E et à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ est une application convexe sur C .

▷ **Exercice 2.**

2.1. Pensez-vous qu'il existe des fonctions strictement convexes non croissantes à l'infini ?

2.2. Pensez-vous qu'il existe des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} convexes vérifiant $f(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$?

▷ **Exercice 3.** Soit $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$. On rappelle que, par définition, A est dite *coercive* s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien standard sur \mathbb{R}^n . Montrer que A est définie positive si et seulement si A est coercive.

▷ **Exercice 4.** Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 \ln(x_1) + x_2 \ln(x_2) - (x_1 + x_2) \ln(x_1 + x_2)$. Montrer que f est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et donner un sous-ensemble C de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur lequel f soit strictement convexe.

▷ **Exercice 5.**

5.1. Dans quel cas une quadratique généralisée $q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}$ est-elle convexe, strictement convexe ?

5.2. On considère le problème aux moindres carrés linéaires

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \|y - X\beta\|^2.$$

Montrez que f est convexe. Dans quel cas est-elle strictement convexe ?