



TD 3 – Problèmes sans contraintes

▷ **Exercice 1.** Soit le problème d'optimisation

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+x_i}, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \langle b, x \rangle = 1, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où a et b sont des vecteurs fixés de $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

1.1. Montrer que (P) possède une solution.

1.2. Déterminer si la solution de (P) est unique.

▷ **Exercice 2.** Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Déterminer toutes les solutions locales des deux problèmes d'optimisation suivants, et qualifier si ce sont des solutions globales ou non :

$$(P_1) \begin{cases} \min \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} f(x_1, x_2) \qquad (P_2) \begin{cases} \max \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} f(x_1, x_2)$$

▷ **Exercice 3.** Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2. \end{aligned}$$

Déterminer toutes les solutions locales des deux problèmes d'optimisation suivants, et qualifier si ce sont des solutions globales ou non :

$$(P_1) \begin{cases} \min \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} f(x_1, x_2) \qquad (P_2) \begin{cases} \max \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} f(x_1, x_2)$$

▷ **Exercice 4.** Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et soit l'application f définie par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto f_{\alpha, \beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2) - \beta x_1 - x_2 + 3. \end{aligned}$$

En discutant les valeurs de (α, β) , déterminer toutes les solutions locales des deux problèmes d'optimisation suivants, et qualifier si ce sont des solutions globales ou non :

$$(P_{\alpha, \beta}) \begin{cases} \min \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} f_{\alpha, \beta}(x_1, x_2) \qquad (Q_{\alpha, \beta}) \begin{cases} \max \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} f_{\alpha, \beta}(x_1, x_2)$$