



# TD 1 – Optimisation

## Formulation mathématique et Calcul différentiel

### 1 Formulation mathématique

#### ▷ Exercice 1. Géoréférence d'une image satellite<sup>1</sup>

On dispose d'une image satellite que l'on désire recaler par rapport à une carte géographique que l'on a à notre disposition. Pour cela on définit  $n$  points, appelés points d'amer, que l'on peut parfaitement faire correspondre sur la carte et sur l'image satellite. On prend par exemple un croisement de route, un point particulier sur une rivière... Concrètement on a donc à notre disposition  $n$  coordonnées  $(x_i, y_i)$  des  $n$  points d'amer sur la carte et  $n$  coordonnées  $(x'_i, y'_i)$  de ces mêmes points sur l'image satellite. On choisit d'exprimer ces coordonnées :

- en pixels pour les  $(x'_i, y'_i)$  (coordonnées (0,0) pour le coin inférieur gauche);
- en mètres relativement à un référentiel géodésique particulier pour les  $(x_i, y_i)$ , via une carte IGN par exemple.

On a par exemple les données suivantes :

Numéros	$x_i$	$y_i$	$x'_i$	$y'_i$
1	252	2661	458805	1831634
2	235	2603	458157	1830577
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	1021	2254	471301	1819574

En pratique l'image satellite est déformée par rapport à la réalité. Cette déformation a plusieurs origines : satellite non vertical par rapport à la prise de vue, présence de nuages dans l'atmosphère... En conséquence on suppose que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} x = \gamma_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 x'^2 + \gamma_4 x' y' + \gamma_5 y'^2 \\ y = \delta_0 + \delta_1 x' + \delta_2 y' + \delta_3 x'^2 + \delta_4 x' y' + \delta_5 y'^2 \end{cases}$$

On désire estimer les paramètres par les moindres carrés.

**1.1.** Pour l'estimation des paramètres  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_5)$  quelles sont les données ?

**1.2.** Écrire le problème d'estimation par les moindres carrés linéaires de  $\gamma$ .

**1.3.** Mêmes questions pour  $\delta$ .

#### ▷ Exercice 2. On s'intéresse ici à la modélisation via les réseaux de neurones.

---

1. Voir cours de C. Monteil

**Définition 1.** Un neurone formel est une fonction paramétrée par  $n+1$  paramètres  $w_1, \dots, w_n, \theta$  :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, w, \theta) &\longmapsto g(x, w, \theta) := \sigma(\sum_{i=1}^n w_i x_i + \theta) \end{aligned}$$

où  $\sigma$  est une fonction donnée qui s'appelle une fonction d'activation. Chaque paramètre  $w_i$  s'appelle le poids synaptique associé au signal d'entrée  $x_i$ .

On prendra dans la suite, sauf mention contraire, comme fonction  $\sigma$  la fonction tangente hyperbolique :

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sigma(x) := \frac{1 - e^x}{1 + e^x}. \end{aligned}$$

**Définition 2.** On a à notre disposition  $K$  points  $x^k \in \mathbb{R}^n$  et  $y^k \in \mathbb{R}$ , on appelle apprentissage du neurone l'estimation par les moindres carrés des paramètres du neurone.

**2.1.** Écrire le problème aux moindres carrés qui définit l'apprentissage. On donnera en particulier la fonction résidu  $r$  en précisant clairement l'espace de départ et l'espace d'arrivée.

**2.2.** Ce problème est-il un problème aux moindres carrés linéaires ? Si oui, on donnera la matrice  $X$ .

**2.3.** Si on prend comme fonction d'activation  $\sigma$  l'identité, le problème aux moindres carrés devient-il linéaire ? Si oui, on donnera la matrice  $X$ .

## 2 calcul différentiel

▷ **Exercice 3.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $c \in \mathbb{R}$ . On pose

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c. \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  est dérivable 2 fois sur  $\mathbb{R}^n$  et calculer  $\nabla f$  et  $\nabla^2 f$ . Même calculs en supposant  $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ .

**3.1.** Application au cas particulier où  $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$ .

▷ **Exercice 4.** Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\|$ .

**4.1.** Montrer que  $f$  est dérivable sur l'ouvert  $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$  et que  $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ .

**4.2.** Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en  $0_{\mathbb{R}^n}$ .

**4.3.** Montrer que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$  et donner  $\nabla^2 f$ .

▷ **Exercice 5.** Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\|x\|^2\right). \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^n$ , et calculer  $\nabla f(x)$  ainsi que la matrice hessienne  $\nabla^2 f(x)$  en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ .