



## TD 4 – Examen 2019 - 20

▷ **Exercice 1.** On considère  $n$  points  $M_i$  du plan, de coordonnées  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ , et on cherche le cercle défini par son centre  $C$  de coordonnées  $(a, b)$  et son rayon  $\rho$  qui soit le plus proche possible de ces  $n$  points (c'est à dire que les distances entre le centre  $C$  et les points  $M_i$  sont les plus proches possibles du rayon  $\rho$ ).

1.1. Écrire le problème d'optimisation formalisant le problème.

1.2. Ce problème d'optimisation est-il un problème aux moindres carrés? Si oui, est-il un problème aux moindres carrés linéaires?

▷ **Exercice 2.** On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Min} & f(x) = (1 + x_3)^3(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 \\ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

2.1. Résoudre la condition nécessaire de solution du premier ordre.

2.2. Le problème  $(P)$  admet-il un ou des minima locaux?

2.3. Le problème  $(P)$  admet-il un minimum global? On pourra calculer  $f(1, 0, -4)$ .

▷ **Exercice 3.** On considère le problème d'optimisation sans contrainte suivant

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = c^T x - \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i^T x) \\ x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, b_i - a_i^T x > 0 \ \forall i = 1, \dots, m\}, \end{cases}$$

avec

- $b_i \in \mathbb{R}$  et  $a_i \in \mathbb{R}^n$  fixés pour tout  $i = 1, \dots, m$ ;
- $c \in \mathbb{R}^n$  fixé.

3.1. On pose pour  $i$  fixé  $f_i(x) = \ln(b_i - a_i^T x)$ . En utilisant la dérivation des fonctions composées donnez la matrice jacobienne de  $f_i$  en  $x$ ,  $J_{f_i}(x)$ . En déduire  $\nabla f(x)$

3.2. Calculer la matrice hessienne de  $f$  en  $x$ ,  $H_f(x)$ .

3.3. On désire résoudre ce problème en appliquant l'algorithme de Newton en partant d'un point  $x^{(0)}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Écrire l'itération courante et donner la dimension du système linéaire obtenu.