



## TD – EDP

### ▷ Exercice 1.

**1.1.** Soit  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^4$  sur un intervalle  $[x - h_0, x + h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . Montrer que  $\forall h \in ]0, h_0], \exists \xi \in ]x - h, x + h[$  tel que

$$\frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h))}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi)$$

En déduire l'ordre de consistance de l'approximation de  $u''(x)$ .

▷ **Exercice 2.** Soit un domaine 2D rectangulaire  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ , avec  $(L_1, L_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . On s'intéresse à l'équation du Laplacien 2D sur ce domaine :

$$\begin{cases} -\nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) - \nu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = c(x), & \forall x \in ]0, L_1[ \times ]0, L_2[ \\ u(x_1, 0) = u(x_1, L_2) = 0, & \forall x_1 \in ]0, L_1[ \\ u(0, x_2) = u(L_1, x_2) = 0, & \forall x_2 \in ]0, L_2[ \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  les coefficients de diffusivité dans les directions  $x_1$  et  $x_2$ , et  $c$  continue sur  $\Omega$ .

**2.1.** On souhaite approcher  $u$  par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de  $\Omega$ , de pas constants  $h_1$  et  $h_2$  dans chacune des deux directions. Soit  $(x_{i,j})_{i=0:N_1+1, j=0:N_2+1}$  les points de discrétisation du maillage. On approxime les dérivées partielles secondes par un schéma centré d'ordre 2. Donner le schéma numérique correspondant.

▷ **Exercice 3.** Soit  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in ]0, 1[, \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \quad (2)$$

avec  $(c, f) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , et  $\forall x \in [0, 1], c(x) \geq 0$ .

On souhaite approcher  $u$  par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de  $[0, 1]$ , de pas constant  $h$ . Soit  $(x_i)_{i=0:N+1}$ , avec  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ , les points de discrétisation du maillage.

**3.1.** En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde de  $u$ , écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire

$$A_h u_h = b_h, \quad (3)$$

avec  $u_h = (u_i)_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$ . Préciser  $u_0$  et  $u_{N+1}$  satisfaisant les conditions aux limites du problème.

**3.2.** Montrer que la matrice  $A_h$  est symétrique définie positive. Que pouvez-vous conclure pour le système (3) ?

**3.3.** On suppose  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$ . Soit  $\xi_h(u) = A_h \Pi_h(u) - b_h$  l'erreur de consistance du schéma (3), avec  $\Pi_h(u) = (u(x_i))_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$ . Montrer que

$$\|\xi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|,$$

avec  $\forall y \in \mathbb{R}^N, \|y\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} |y_i|$ .

En conclure quant à l'ordre de consistance du schéma (3) pour la norme infinie.

**3.4.** On suppose toujours  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$ . Montrer que

$$\|u_h - \Pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

On admettra que  $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$ .

En conclure quant à la convergence du schéma (3) pour la norme infinie.

▷ **Exercice 4.** Soit  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in ]0, 1[, \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta, \end{cases} \quad (4)$$

avec  $(c, f) \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \times \mathcal{C}^0([0, 1])$ , et  $c$  telle que  $\exists c_0 > 0, \forall x \in [0, 1], c(x) \geq c_0$ .

On souhaite approcher  $u$  par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de  $[0, 1]$ , de pas constant  $h$ . Soit  $(x_i)_{i=0:N+1}$ , avec  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ , les points de discrétisation du maillage.

**4.1.** En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde de  $u$ , et des schémas décentrés d'ordre 1 pour sa dérivée première, écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire

$$A_h u_h = b_h, \quad (5)$$

avec  $u_h = (u_i)_{i=0:N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$ .

Par la suite, on admet que le système admet une unique solution.

**4.2.** On suppose  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$ . Soit  $\xi_h(u)$  l'erreur de consistance du schéma (5). Montrer que  $\forall h_0 > 0, \exists C > 0$  tel que

$$\forall h \in ]0, h_0], \quad \|\xi_h(u)\|_\infty \leq Ch.$$

En conclure quant à l'ordre de consistance du schéma (5) pour la norme infinie.

**4.3.** Proposer une stratégie permettant d'obtenir un schéma d'ordre 2 pour la norme infinie.

▷ **Exercice 5.** Soit  $u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t \in ]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in ]0, 1[. \end{cases} \quad (6)$$

avec  $f$  continue sur  $[0, 1] \times [0, T]$ .

On souhaite approcher  $u$  par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de  $[0, 1] \times [0, T]$ , de pas d'espace  $h$  et de pas de temps  $\Delta t$ , tous les deux supposés constants. Soit  $(x_i)_{i=0:N+1}$ , avec  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ , et  $(t_n)_{n=0:M+1}$ , avec  $t_0 = 0$  et  $t_{M+1} = T$ , les points de discrétisation du maillage.

On se propose d'étudier les propriétés de consistance et de stabilité du schéma "saute-mouton", pour la norme  $\|\cdot\|_h$  sur  $\mathbb{R}^N$  (espace). Celui-ci s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall i = 1 : N, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n). \quad (7)$$

**5.1.** On suppose que le vecteur  $(u_i^1)_{i=1:N}$  a été obtenu avec un schéma consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace pour la norme  $\|\cdot\|_h$ . Montrer que le schéma saute-mouton est consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace pour la norme  $\|\cdot\|_h$ .

**5.2.** Etude de stabilité du schéma pour la norme  $\|\cdot\|_h$ .

a) Montrer que ce schéma s'écrit matriciellement :

$$\forall n = 1 : M, \quad Z_h^{n+1} = M_h Z_h^n + 2\Delta t C^n \quad (8)$$

en précisant  $Z_h^n$ ,  $M_h$ ,  $C^n$ .

b) Montrer que  $\rho(M_h) > 1$ . Conclure quant à la stabilité du schéma pour la norme  $\|\cdot\|_h$ .

▷ **Exercice 6.** Soit  $u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t \in ]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in ]0, 1[. \end{cases} \quad (9)$$

avec  $f$  continue sur  $[0, 1] \times [0, T]$ .

On se propose d'étudier les propriétés de consistance et de stabilité du schéma "implicite", pour la norme infinie sur  $\mathbb{R}^N$  (espace). Celui-ci s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall i = 1 : N, \quad \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n). \quad (10)$$

On souhaite approcher  $u$  par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de  $[0, 1] \times [0, T]$ , de pas d'espace  $h$  et de pas de temps  $\Delta t$ , tous les deux supposés constants. Soit  $(x_i)_{i=0:N+1}$ , avec  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ , et  $(t_n)_{n=0:M+1}$ , avec  $t_0 = 0$  et  $t_{M+1} = T$ , les points de discrétisation du maillage.

**6.1.** Ce schéma s'écrit matriciellement :

$$\forall n = 1 : M + 1, \quad B_h U_h^n = U_h^{n-1} + \Delta t F^n \quad (11)$$

Rappeler ce que valent  $U_h^n$ ,  $B_h$ ,  $F^n$  et  $U_h^0$ . On notera  $c = \frac{\Delta t}{h^2}$ .

**6.2.** Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace pour la norme infinie.

**6.3.** Etude de stabilité du schéma pour la norme infinie.

- a) Soit  $x \in \mathbb{R}^N$ . Montrer que  $\forall i = 1 : N, [B_h x]_i \geq 0 \Rightarrow x_i \geq 0$ .  
En déduire que  $[B_h^{-1}]_{i,j} \geq 0, \quad \forall i = 1 : N, \forall j = 1 : N$ .
- b) Montrer que  $\|B_h^{-1}\|_\infty \leq 1$ .
- c) En déduire que le schéma est inconditionnellement stable pour la norme infinie.

**6.4.** Conclure quant à la convergence du schéma pour la norme infinie.