

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE



---

# MATHS Rappels

## Suites, Fonctions, Développements limités

---

Pascal Floquet  
Xuân Meyer  
Jean-Claude Satge  
Modifié par Joseph Gergaud

Première Année à Distance

Septembre 2006

Octobre 2017



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Nombres Réels - Suites numériques</b>	<b>5</b>
1.1	Nombres réels . . . . .	5
1.1.1	Existence et unicité de $\mathbb{R}$ . . . . .	5
1.1.2	Propriétés élémentaires des nombres réels . . . . .	6
1.2	Suites numériques . . . . .	7
1.2.1	Définitions . . . . .	7
1.2.2	Suites croissantes, suites décroissantes . . . . .	7
1.2.3	Suites majorées, minorées . . . . .	8
1.2.4	Suites arithmétiques et géométriques . . . . .	8
1.2.5	Limite d'une suite . . . . .	9
1.2.6	Opérations sur les limites . . . . .	10
1.2.7	Théorèmes de comparaison . . . . .	11
1.2.8	Comportement des suites monotones . . . . .	11
1.2.9	Suites de Cauchy . . . . .	11
1.2.10	Suites adjacentes . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Fonctions numériques de la variable réelle</b>	<b>13</b>
2.1	Limite . . . . .	13
2.1.1	Limite réelle (finie) en a. . . . .	13
2.1.2	Limite infinie en a. Asymptote verticale. . . . .	14
2.1.3	Limite à gauche. Limite à droite. . . . .	15
2.1.4	Limite réelle (finie) en $+\infty$ (ou $-\infty$ ). . . . .	15
2.1.5	Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$ ) . . . . .	15
2.1.6	Opérations sur les limites . . . . .	16
2.1.7	Théorèmes de comparaison . . . . .	17
2.2	Continuité . . . . .	17
2.2.1	Continuité en un point, sur un intervalle. . . . .	17
2.2.2	Prolongement par continuité . . . . .	18
2.2.3	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	18
2.2.4	Fonction continue strictement monotone . . . . .	18
2.3	Dérivation . . . . .	19
2.3.1	Définitions . . . . .	19
2.3.2	Interprétation géométrique . . . . .	19
2.3.3	Nombre dérivé à gauche, à droite . . . . .	20
2.3.4	Tableaux des fonctions dérivées . . . . .	21
2.3.5	Dérivées sucessives . . . . .	22
2.3.6	Dérivée d'une fonction composée . . . . .	22
2.3.7	Variations des fonctions . . . . .	23
2.3.8	Extremum d'une fonction . . . . .	23
2.3.9	Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective . . . . .	23
2.3.10	Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>27</b>
3.1	Fonctions trigonométriques et réciproques . . . . .	27
3.1.1	Fonctions circulaires . . . . .	27
3.1.2	Fonctions circulaires réciproques . . . . .	27
3.2	Fonctions hyperboliques et réciproques . . . . .	28
3.2.1	Fonctions hyperboliques . . . . .	28
3.2.2	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Développements Limités</b>	<b>31</b>
4.1	Définition du développement limité . . . . .	31
4.2	Unicité du développement limité . . . . .	31
4.3	Développement limité d'une fonction paire ou impaire . . . . .	32
4.4	Opérations algébriques sur les développements limités . . . . .	32
4.5	Développement limité d'une fonction composée . . . . .	33
4.6	Formule de Taylor . . . . .	34
4.7	Développement limité d'une fonction $(n+1)$ fois différentiable . . . . .	34
4.8	Table de développements limités autour de 0 . . . . .	35
4.9	Dérivation et intégration de développements limités . . . . .	35
4.9.1	Dérivation . . . . .	35
4.9.2	Intégration . . . . .	35
4.10	Applications des développements limités . . . . .	35
4.10.1	Calcul de limites et résolution de " formes indéterminées " . . . . .	36
4.10.2	Développement limité en $a$ à gauche et à droite . . . . .	37
4.10.3	Développement limité au voisinage de l'infini . . . . .	37

# Chapitre 1

## Nombres Réels - Suites numériques

### 1.1 Nombres réels

#### 1.1.1 Existence et unicité de $\mathbb{R}$

Nous admettrons l'existence et l'unicité d'un ensemble  $\mathbb{R}$ , dont les éléments sont appelés les nombres réels, et qui est muni de deux lois internes  $+$  et  $\times$ , et d'une relation  $\leq$ , tel que

1.  $(\mathbb{R}, +, \times)$  est un corps commutatif
2.  $\leq$  est une relation d'ordre total dans  $\mathbb{R}$
3. Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure

**Définition 1.1.1 (Ensemble borné)** Soit  $E$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $E$  est borné si et seulement si  $E$  est majorée et minorée

**Définition 1.1.2 (Plus grand élément, plus petit élément)** Soit  $E \subset \mathbb{R}$

1. On dit que  $E$  admet **un plus grand élément**  $M$  si et seulement si :

$$M \in E, \text{ et } M \text{ est un majorant de } E$$

$$\text{On note } M = \text{Max}(E)$$

2. On dit que  $E$  admet **un plus petit élément**  $m$  si et seulement si :

$$m \in E, \text{ et } m \text{ est un minorant de } E$$

$$\text{On note } m = \text{Min}(E)$$

**Définition 1.1.3 (Borne supérieure, borne inférieure)** Soit  $E \subset \mathbb{R}$

1. On appelle **borne supérieure** le plus petit des majorants de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , s'il existe. On le note  $\text{Sup}(E)$ . Un majorant  $M$  de  $E$  est égal à la borne supérieure si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, M - \varepsilon < x \leq M.$$

2. On appelle **borne inférieure** le plus grand des minorants de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , s'il existe. On le note  $\text{Inf}(E)$ . Un minorant  $m$  de  $E$  est égal à la borne inférieure si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, m \leq x < m + \varepsilon.$$

**Définition 1.1.4 (Intervalle de  $\mathbb{R}$ )** Soient  $a, b$  deux réels tels que  $a \leq b$

1. On appelle **intervalle fermé** de  $\mathbb{R}$  d'extrémité  $a$  et  $b$  l'ensemble noté  $[a, b]$  des  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq x \leq b$ .
2. On appelle **intervalle ouvert** de  $\mathbb{R}$  d'extrémité  $a$  et  $b$  l'ensemble noté  $]a, b[$  des  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $a < x < b$ .
3. On appelle **intervalle fermé à gauche, ouvert à droite** de  $\mathbb{R}$  d'extrémité  $a$  et  $b$  l'ensemble noté  $[a, b[$  des  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq x < b$ .

4. On appelle intervalle ouvert à gauche, fermé à droite de  $\mathbb{R}$  d'extrémité  $a$  et  $b$  l'ensemble noté  $]a, b]$  des  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $a < x \leq b$ .
5. On appelle intervalle semi-ouvert un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite ou un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite.

### Définition 1.1.5 (Voisinage d'un point)

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On appelle voisinage de  $a$  tout sous ensemble  $V$  de  $\mathbb{R}$  qui contient un intervalle ouvert contenant  $a$  :

$$V \text{ est un voisinage de } a \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad / \quad ]a - \alpha, a + \beta[ \subset V$$

2. Soit  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ . On appelle voisinage de  $a$  tout sous ensemble  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  qui contient un sous ensemble du type  $]a_1 - \alpha_1, a_1 + \beta_1[ \times ]a_2 - \alpha_2, a_2 + \beta_2[$  où  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  sont 4 réels strictement positifs.
3. Soit  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . On appelle voisinage de  $a$  tout sous ensemble  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  qui contient un sous ensemble du type

$$]a_1 - \alpha_1, a_1 + \beta_1[ \times ]a_2 - \alpha_2, a_2 + \beta_2[ \cdots \times ]a_n - \alpha_n, a_n + \beta_n[$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  sont des réels strictement positifs.

**Remarque 1.1.1** Dire que  $V$  est un voisinage du point  $a$  signifie en fait que les points les “plus proches” de  $a$  sont dans  $V$ .

**Exemple 1.1.1** Nous donnons ci-dessous deux exemples correspondant aux deux premiers cas de la définition

1.  $]2; 5[$  est un voisinage de  $2,1$ . Il suffit en effet de prendre  $\alpha = 0,05$  et  $\beta = 1$ .  
 $]2; 5]$  n'est pas un voisinage de  $5$  car si  $\beta > 0$  nous avons toujours  $\beta + 5 > 5$ .
2. L'ensemble  $V = [1; 3] \times [1,5; 2,5]$  représenté ci-dessous est un voisinage du point  $a = (1,5; 2)$ .

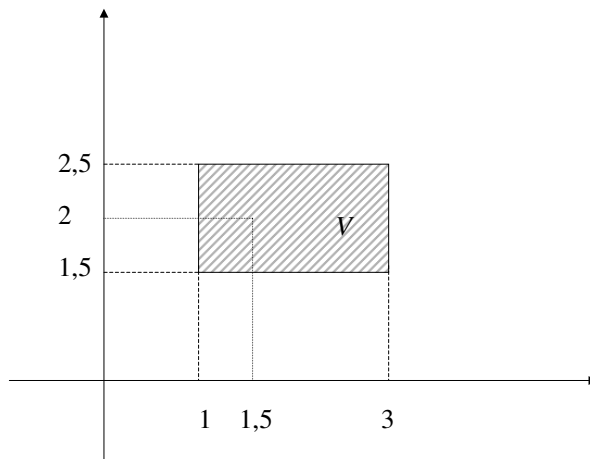


FIGURE 1.1 –  $V$  est voisinage du point  $a = (1,5; 2)$

### 1.1.2 Propriétés élémentaires des nombres réels

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
2.  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x < y \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$
4. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tous réels  $x_1, \dots, x_n$  :  $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$
5. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tous réels  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  :
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i$
  - $\forall i \in \{1, \dots, n\}, 0 \leq x_i \leq y_i \Rightarrow \prod_{i=1}^n x_i \leq \prod_{i=1}^n y_i$
  - $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq y_i$  et  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \Rightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = y_i)$

**Théorème 1.1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tous réels  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  :

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

## 1.2 Suites numériques

### 1.2.1 Définitions

**Définition 1.2.1** Une suite numérique est une fonction  $u$  de  $\mathbb{N}$  (ou une partie de  $\mathbb{N}$ ) vers  $\mathbb{R}$ . L'image  $u(n)$  de l'entier  $n$  est notée  $u_n$ .  $u_n$  est appelé le terme général, ou le terme d'indice  $n$ , de la suite. La suite est notée  $(u_n)$

#### Exemple 1.2.1

- soit  $(u_n)$  définie par :  $u_n = n^2 + n$   
On a :  $u_0 = 0 ; u_1 = 2 ; u_2 = 6 ; u_3 = 12 ; \dots ; u_{10} = 110 ; \dots ; u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)$
- soit  $(v_n)$  définie par :  $v_n = (-1)^n (n^2 + n)$   
On a :  $v_0 = 0 ; v_1 = -2 ; v_2 = 6 ; v_3 = -12 ; \dots ; v_{10} = 110$
- soit  $(w_n)$  la suite définie par :  $w_0 = 3$  et  $w_{n+1} = 2w_n$   
On a :  $w_0 = 3 ; w_1 = 6 ; w_2 = 12 ; w_3 = 24 ; \dots$

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont définies par des **formules explicites** qui permettent de calculer chaque terme de la suite à partir de  $n$ .

$(u_n)$  est définie à partir de la fonction  $f : x \mapsto x^2 + x$ . On a :  $u_n = f(n)$

$(w_n)$  est définie **par récurrence** par la donnée du premier terme  $w_0$  et de la **relation de récurrence** :  $w_{n+1} = f(w_n)$ . Pour connaître le terme de rang  $n$ , il faut connaître celui de rang  $(n-1)$

### 1.2.2 Suites croissantes, suites décroissantes

**Définition 1.2.2** Une suite  $(u_n)$  est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Une suite  $(u_n)$  est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq u_{n+1}$

On dit que  $(u_n)$  est **monotone** si elle est croissante, ou si elle est décroissante.

Pour étudier la monotonie des suites on utilise essentiellement les méthodes suivantes :

1. Technique algébrique : Elle consiste :
  - soit à étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$  ;
  - soit à comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1, si l'on sait que  $u_n$  est strictement positif pour tout  $n$ .

*Exemple* : soit  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = n^2 + n$

On a :  $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - (n^2 + n) = 2n + 2$

Pour tout  $n$  entier naturel,  $2n + 2 > 0$ ,

et donc  $u_{n+1} - u_n > 0$  ou encore :  $u_n < u_{n+1}$ .

Donc  $(u_n)$  est croissante.

2. Technique fonctionnelle :

Elle s'applique aux suites de la forme  $u_n = f(n)$ . On utilise le sens de variation de la fonction  $f$ .

*Exemple* : soit  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = n^2 + n$

$(u_n)$  est définie à partir de la fonction  $f : x \mapsto x^2 + x$ .  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

Donc  $(u_n)$  est croissante.

3. Technique par récurrence :

Elle s'applique aux suites de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Exemple 1.2.2** Prouver que la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$  est strictement croissante.

- La propriété est vraie pour  $n = 0$ , en effet  $u_0 = 0$  et  $u_1 = \sqrt{6}$ , donc  $u_1 > u_0$
- Supposons la propriété vraie au rang  $n$ , c'est à dire :  $u_n > u_{n-1}$

On a :  $u_n + 6 > u_{n-1} + 6$

Donc  $\sqrt{u_n + 6} > \sqrt{u_{n-1} + 6}$ , car la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante

Donc  $u_{n+1} > u_n$

- la suite  $(u_n)$  est donc strictement croissante.

## 1.2.3 Suites majorées, minorées

**Définition 1.2.3** Soit  $(u_n)$  une suite numérique.

La suite  $(u_n)$  est majorée si et seulement s'il existe un réel  $M$  tel que  $u_n \leq M$ , pour tout entier naturel  $n$ .

La suite  $(u_n)$  est minorée si et seulement s'il existe un réel  $m$  tel que  $u_n \geq m$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Note : Si  $(u_n)$  est, à la fois, majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**.

Pour prouver qu'une suite est majorée ou minorée on utilise essentiellement les méthodes suivantes :

**Exemple 1.2.3** Prouver que la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{\ln n}{n}$  est telle que :  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{e}$

Le tableau de variation de la fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  montre que cette fonction est croissante sur  $]0; \frac{1}{e}]$ , passe par un maximum égal à  $\frac{1}{e}$ , et décroît vers 0.

De plus  $f(1) = 0$ . On peut donc affirmer que pour  $n$  entier supérieur ou égal à 1, on a :  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{e}$

**Exemple 1.2.4** Prouver que la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$  est telle que  $0 \leq u_n \leq 3$ .

On raisonne par récurrence

- La propriété est vraie pour  $n = 0$ , en effet  $u_0 = 0$  et  $0 \leq u_0 \leq 3$
- Supposons la propriété vraie au rang  $n$ , c'est à dire :  $0 \leq u_n \leq 3$

On a :  $6 \leq u_n + 6 \leq 9$

Donc  $\sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{9}$ , car la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante

Donc  $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3$ , et donc  $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ .

- la suite  $(u_n)$  est donc telle que  $0 \leq u_n \leq 3$ .

## 1.2.4 Suites arithmétiques et géométriques

**Définition 1.2.4**

- Une suite  $(u_n)$  est **arithmétique** si chacun de ses termes se déduit du précédent en lui ajoutant une constante  $r$  appelée raison.  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0$  et par :  $u_{n+1} = u_n + r$
- Une suite  $(u_n)$  est **géométrique** si chacun de ses termes se déduit du précédent en le multipliant par une constante  $q$  appelée raison.  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0$  et par :  $u_{n+1} = u_n \times q$

Principaux résultats



	<i>Suite arithmétique</i>	<i>Suite géométrique</i>
Calcul de $u_n$	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
Relation entre $u_n$ et $u_p$	$u_n - u_p = (n - p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
$S_n = \sum_{p=0}^n u_p$	$S_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$	Si $q \neq 1$ , $S_n = \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$

**Exemple 1.2.5** Calculer les sommes :  $S = 11 + 13 + 15 + \dots + 47 + 49$  et  $S' = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16384}$

- $S$  est la somme de 20 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2. ( $20 = \frac{49 - 11}{2} + 1$ ).

$$S = \frac{11 + 49}{2} \times 20 = 600$$

- $S'$  est la somme de 13 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme  $\frac{1}{4}$  et de raison

$$\frac{1}{2} \text{ En effet : } \frac{1}{16384} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{12}}.$$

$$\text{Donc } S = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{13}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^{13} - 1}{2^{14}} = \frac{8191}{16384}$$

### 1.2.5 Limite d'une suite

**Définition 1.2.5** Soit  $(u_n)$  une suite numérique et  $l$  un réel. On dit que  $(u_n)$  converge vers  $l$  (ou a pour limite  $l$ ) si tout intervalle ouvert contenant  $l$ , contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  ou encore  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

Si la suite  $(u_n)$  ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

**Remarque 1.2.1**  $|u_n - l| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon \iff u_n \in ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

**Exemple 1.2.6** Soit  $x_n = \frac{1}{n}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

En effet  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = \frac{1}{\varepsilon} / \forall n > n_0, 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Et donc  $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \iff |x_n - 0| \leq \varepsilon$

Plus généralement

Les suites définies, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par :  $\frac{1}{n^\alpha}$ , ( $\alpha > 0$ ) ont pour limite 0

**Remarque 1.2.2** Si une suite est convergente, sa limite est unique.

**Définition 1.2.6** Soit  $(u_n)$  une suite numérique et  $A$  un réel positif choisi aussi grand qu'on le veut. On dit que  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  si tout intervalle de la forme  $[A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit :  $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \implies u_n > A$

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou encore  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

De même :

$(u_n)$  admet pour limite  $-\infty \iff \forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \implies u_n < A$ .

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  ou encore  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Lorsque la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  [respectivement  $-\infty$ ], on dit qu'elle diverge vers  $+\infty$  [respectivement  $-\infty$ ]. Mais attention, une suite peut être divergente pour deux raisons :

- soit sa limite est  $+\infty$  ou  $-\infty$

- soit elle n'a pas de limite : par exemple la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = (-1)^n$  est une suite alternée, chaque terme est égal à 1 si  $n$  est pair ou  $(-1)$  si  $n$  est impair ; elle n'a pas de limite, on dit qu'elle diverge.

*En particulier :*

Les suites définies, pour  $n \in \mathbb{N}$ , par :  $u_n = n^\alpha$ , ( $\alpha > 0$ ) ont pour limite  $+\infty$

### 1.2.6 Opérations sur les limites

**Théorème 1.2.7** Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites numériques qui convergent respectivement vers  $l$  et  $l'$  alors

1. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = u_n + v_n$  converge vers  $l + l'$
2. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = ku_n$  ( $k$  réel fixé) converge vers  $kl$
3. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = u_n v_n$  converge vers  $ll'$
4. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$  converge vers  $\frac{l}{l'}$  si  $l' \neq 0$

**Théorème 1.2.8** Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  alors

1. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = u_n + v_n$  est telle que :  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
2. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = ku_n$  ( $k$  réel fixé) est telle que :  
 $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  si  $k > 0$  et  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$  si  $k < 0$
3. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = u_n v_n$  est telle que :  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

On obtient des résultats analogues lorsque  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

**Théorème 1.2.9** Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  alors

1. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = u_n + v_n$  est telle que :  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
2. La suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = u_n v_n$  est telle que :  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  si  $l > 0$  et  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$  si  $l < 0$

**Théorème 1.2.10**

1. Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = \frac{1}{u_n}$  est telle que :  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
2. Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et si  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang, alors la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = \frac{1}{u_n}$  est telle que :  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

**Remarque 1.2.3** Il existe plusieurs cas, appelés formes indéterminées :

1. Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , on ne peut pas conclure immédiatement pour la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = u_n + v_n$
2. Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  (ou  $-\infty$ ) et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , on ne peut pas conclure immédiatement pour la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = u_n v_n$
3. Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  (ou  $-\infty$ ) et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  (ou  $-\infty$ ), on ne peut pas conclure immédiatement pour la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$
4. Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , on ne peut pas conclure immédiatement pour la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

**Exemple 1.2.7** Soit  $u_n = \ln n$  et  $v_n = n$

$w_n = \frac{u_n}{v_n}$  est une forme indéterminée,

$z_n = u_n - v_n$  est une forme indéterminée.

- $w_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ln n}{n}$  donc  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
- $z_n = u_n - v_n = \ln n - n = n \left( \frac{\ln n}{n} - 1 \right)$   
Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n)$  et donc  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

### 1.2.7 Théorèmes de comparaison

**Théorème 1.2.11** Si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

**Théorème 1.2.12** Soient  $u_n, v_n$  et  $w_n$  trois suites telles que :

Si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  alors  $(v_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

**Exemple 1.2.8** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{\sin n}{n}$

On a  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

### 1.2.8 Comportement des suites monotones

**Théorème 1.2.13 (dit de la convergence monotone)**

1. Toute suite croissante et majorée est convergente
2. Toute suite décroissante et minorée est convergente

**Exemple 1.2.9** Soit la suite  $(u_n)$  définie de la façon suivante :  $u_0 = 0 ; u_1 = 0,1 ; u_2 = 0,12 ; u_3 = 0,123 ; \dots ; u_{11} = 0,1234567891011 ; u_n$  est le nombre obtenu en juxtaposant successivement tous les entiers  $1, 2, 3, \dots, n$  après la virgule.

Il est facile de montrer que  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1. Donc  $(u_n)$  converge.

**Théorème 1.2.14**

1. Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$
2. Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$

On en déduit :

**Théorème 1.2.15**  $q$  est un réel.

1. Si  $q > 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
2. Si  $|q| < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Note : si  $q = 1$ , on a  $q^n = 1$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

**Remarque 1.2.4** Si  $q < -1$ ,  $q^n$  n'a pas de limite.  $q^n$  prend des valeurs infiniment grandes en valeur absolue, positives si  $n$  est pair et négatives si  $n$  est impair.

### 1.2.9 Suites de Cauchy

**Définition 1.2.16** On dit qu'une suite numérique est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p \geq n_0, \forall q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

**Théorème 1.2.17** Soit  $(u_n)$  une suite numérique, les propositions suivantes sont équivalentes

1.  $(u_n)$  est une suite de Cauchy
2.  $(u_n)$  est convergente

### 1.2.10 Suites adjacentes

**Définition 1.2.18** On dit que les deux suites numériques  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes lorsque la suite  $(u_n)$  est croissante, la suite  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

**Théorème 1.2.19** Si deux suites numériques  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes et telles que la suite  $(u_n)$  est croissante et la suite  $(v_n)$  est décroissante, alors elles convergent vers la même limite  $l$ , et, pour tout  $n$  on a :  $u_n \leq l \leq v_n$

**Démonstration :** Soit  $w_n = v_n - u_n$

On a :  $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1})$

Or la suite  $(u_n)$  est croissante et la suite  $(v_n)$  est décroissante

donc  $(v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1})$  est la somme de deux termes négatifs

et donc  $w_{n+1} - w_n \leq 0$ .

La suite  $(w_n)$  est donc décroissante et converge vers 0, ce qui permet de dire que tous les termes de la suite  $(w_n)$  sont positifs.

On en déduit que  $v_n - u_n \geq 0$ , soit  $u_n \leq v_n$

Or  $(v_n)$  est décroissante, donc, pour tout  $n, v_n \leq v_0$  et donc  $u_n \leq v_0$

$(u_n)$  est donc une suite croissante et majorée (par  $v_0$ ).

$(u_n)$  est donc convergente vers  $l$ .

On montre de même que  $(v_n)$  est décroissante et minorée (par  $u_0$ ).  $(v_n)$  est donc convergente vers  $l'$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l' - l$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Donc  $l' = l$

**Exemple 1.2.10** Soient les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

On a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$
- La suite  $(u_n)$  est croissante (évident)
- La suite  $(v_n)$  est décroissante

$$\text{En effet : } v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left( u_n + \frac{1}{n!} \right)$$

$$\text{soit } v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$\text{C'est à dire : } v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$\text{Enfin } v_{n+1} - v_n = \frac{1-n}{(n+1)!}. \text{ Et ce nombre est négatif pour } n \geq 1.$$

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc adjacentes, elles convergent vers la même limite  $l$ , et, pour tout  $n$  on a :  $u_n \leq l \leq v_n$

## Chapitre 2

# Fonctions numériques de la variable réelle

Soit  $E$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ , on appelle fonction réelle de la variable réelle toute fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 2.1 Limite

$f$  est une fonction numérique  $a$  et  $l$  sont deux réels.  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point

#### 2.1.1 Limite réelle (finie) en $a$ .

**Définition 2.1.1**  $f$  est une fonction définie sur  $I$  sauf peut-être au point  $a$ . Dire que  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  signifie que tout voisinage de  $l$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez voisin de  $a$ .

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  ou  $f(x) \rightarrow l$

Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Note : si  $f$  est définie en  $a$  et si la limite de  $f$  existe alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

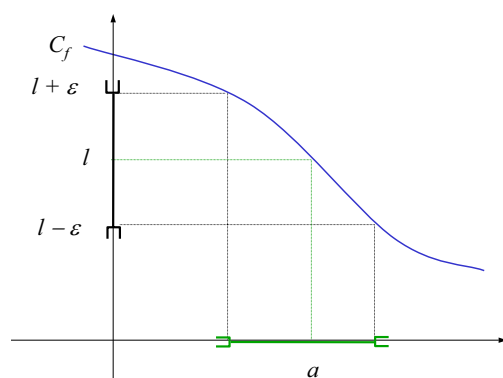


FIGURE 2.1 – limite réelle en  $a$

**Exemple 2.1.1** Chercher la limite en  $a = 1$  de  $f : x \mapsto \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$  définie sur  $D = ]-\infty ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$

On a :  $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

donc, pour  $x \neq 1$ , on a :  $f(x) = x + 2$  et  $|f(x) - 3| = |x - 1|$

donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta (= \varepsilon) / \forall x \in D, |x - 1| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - 3| = |x - 1| \leq \varepsilon$

on en déduit :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

**Exemple 2.1.2** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{pour } x < 1 \\ f(x) = 3 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$

$f(1) = 3$ , mais 3 n'est pas la limite de  $f$  en 1, en effet l'intervalle  $J = ]2, 5; 3, 5[$ , contenant 3 ne contient pas toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  voisin de 1 :  $f(0,99) = 2$  et  $2 \notin J$

### 2.1.2 Limite infinie en $a$ . Asymptote verticale.

**Définition 2.1.2**  $f$  est une fonction définie sur  $I$  sauf peut-être au point  $a$ ,  $M$  est un réel positif, dire que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  signifie que tout intervalle de la forme  $[M; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez voisin de  $a$ . On écrit :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $f(x) \rightarrow +\infty$   $\lim_{x \rightarrow a}$

Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si  $-f$  admet  $+\infty$  pour limite en  $a$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  la droite d'équation  $x = a$  est asymptote (verticale) à la courbe.

**Exemple 2.1.3**  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par :  $f(x) = \frac{2}{(x - 2)^2}$ .

Dès que  $|x - 2| \leq 0,01$ , on a :  $f(x) \geq 2 \times 10^4$

On comprend que tout intervalle de la forme  $[M; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez voisin de 2

On a :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ .

La droite d'équation  $x = 2$  est asymptote à la courbe.

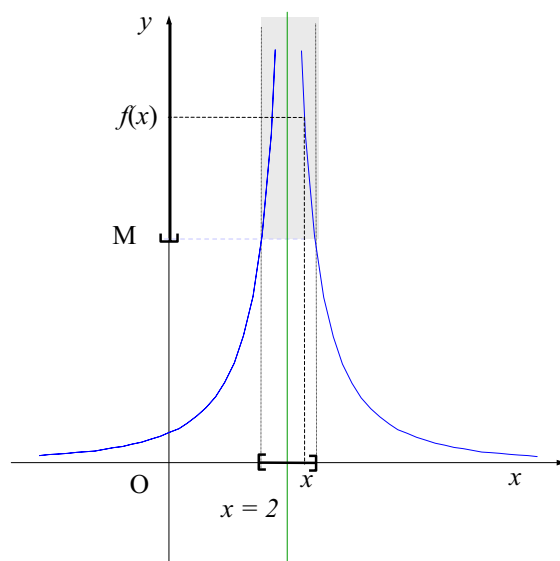


FIGURE 2.2 – Limite infinie au point 2

### 2.1.3 Limite à gauche. Limite à droite.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $f(x) = \frac{2}{1-x}$ .

Au voisinage du point 1,  $f$  prend des valeurs très grandes en valeur absolue, positives pour  $x < 1$  et négatives pour  $x > 1$ .  $f$  n'a donc pas de limite en 1.

Cependant la fonction  $f_1$  définie sur  $I = ]1; +\infty[$  par :  $f_1(x) = \frac{2}{1-x}$ , qui est la restriction de  $f$  à  $I$  (ou à droite), tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers 1. On dit que  $-\infty$  est la **limite à droite** en 1 de la fonction  $f$ .

On écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$  ou encore  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

On peut donc dire que la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote à la courbe.

On définit de même la **limite à gauche** en 1 :

On écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$  ou encore  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

De même, la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote à la courbe.

**Définition 2.1.3**  $\alpha$  désigne un réel fixé,  $+\infty$  ou  $-\infty$ . On dit que  $\alpha$  est la limite à gauche [respectivement à droite] de  $f$  au point  $a$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / -\eta \leq x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

[respectivement :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / 0 < x - a \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ ]

On écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  la limite à gauche

Et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$  la limite à droite.

**Théorème 2.1.4** Si une fonction  $f$  admet au point  $a$  une limite à gauche  $l_g$  et une limite à droite  $l_d$  telles que  $l_g = l_d = l$ , alors  $f$  admet une limite ( $l$ ) en  $a$

Contre-exemple : Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{pour } x < 1 \\ f(x) = 3 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$

$f$  n'a pas la limite de en 1 (Voir exemple 2.1.2).

On peut écrire cependant :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

### 2.1.4 Limite réelle (finie) en $+\infty$ (ou $-\infty$ ).

**Définition 2.1.5** Dire que  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  signifie que tout voisinage de  $l$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  appartenant à un intervalle de la forme  $[A; +\infty[$ . On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ ou } f(x) \rightarrow l \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On définit de manière analogue :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0 / x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

### 2.1.5 Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$ )

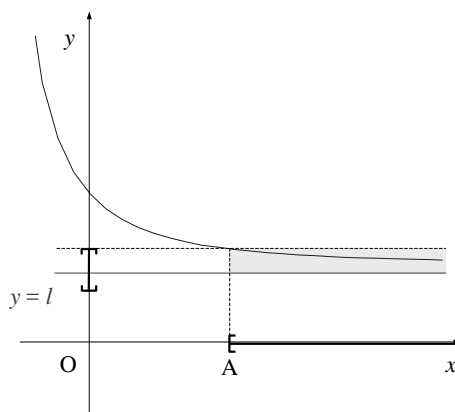
**Définition 2.1.6** Dire que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  signifie que tout intervalle de la forme  $[M; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  appartenant à un intervalle de la forme  $[A; +\infty[$ . On écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ou  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$

Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 / x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$$

On définit de manière analogue :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists B < 0 / x \leq B \Rightarrow f(x) \geq M$$

FIGURE 2.3 – Limite finie en  $+\infty$ 

### 2.1.6 Opérations sur les limites

$\alpha$  désigne un réel fini,  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**Théorème 2.1.7** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions qui admettent respectivement  $l$  et  $l'$  (finies) lorsque  $x$  tend vers  $\alpha$ , alors

1.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x) = l + l'$
2.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} kf(x) = kl$ , que que soit  $k$  réel
3.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) = ll'$
4.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$  si  $l' \neq 0$

**Théorème 2.1.8** Si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$  alors :

1.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x) = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} kf(x) = +\infty$ , si  $k > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} kf(x) = -\infty$ , si  $k < 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\alpha} f(x)g(x) = +\infty$

**Théorème 2.1.9** Si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$  ( $l$  réel fini) et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$  alors :

1.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x) = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) = +\infty$ , si  $l > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) = -\infty$ , si  $l < 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , si  $l \neq 0$

**Théorème 2.1.10**  $l$  est un réel fini,

1. Si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0^+$  alors  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = (\text{signe de } l)\infty$
2. Si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0^-$  alors  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = (\text{signe de } -l)\infty$

**Remarque 2.1.1** Il existe plusieurs cas, appelés formes indéterminées :

1. Si  $f(x) \rightarrow +\infty$  et  $g(x) \rightarrow -\infty$ , on ne peut pas conclure immédiatement pour la limite de  $f(x) + g(x)$
2. Si  $f(x) \rightarrow +\infty$  (ou  $-\infty$ ) et  $g(x) \rightarrow 0$ , on ne peut pas conclure immédiatement pour la la limite de  $f(x)g(x)$



3. Si  $f(x) \rightarrow +\infty$  (ou  $-\infty$ ) et  $g(x) \rightarrow +\infty$  (ou  $-\infty$ ), on ne peut pas conclure immédiatement pour la limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$
4. Si  $f(x) \rightarrow 0$  et  $g(x) \rightarrow 0$ , on ne peut pas conclure immédiatement pour la limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$

**Exemple 2.1.4** Soit  $f(x) = \ln x$  et  $g(x) = x$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x)$

On ne peut conclure directement, on est en présence d'une forme indéterminée  $\infty - \infty$ .  
On écrit :  $f(x) - g(x) = \ln x - x = x \left( \frac{\ln x}{x} - 1 \right)$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)$ , car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$   
Et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = -\infty$

### 2.1.7 Théorèmes de comparaison

**Théorème 2.1.11**  $\alpha$  désigne un réel fini,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ,

1. Si pour  $x$  voisin de  $\alpha$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$
2. Si pour  $x$  voisin de  $\alpha$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$
3. Si pour  $x$  voisin de  $\alpha$ ,  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} v(x) = l$  alors :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$

**Exemple 2.1.5** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2}$

On a  $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$

## 2.2 Continuité

### 2.2.1 Continuité en un point, sur un intervalle.

**Définition 2.2.1 (fonction continue au point  $a$ )**  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  ouvert contenant  $a$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Autrement dit :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

**Théorème 2.2.2** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues en  $a$ , alors  $f + g$ ,  $kf$  et  $fg$  sont continues en  $a$ . De plus, si  $g(a) \neq 0$  alors  $\frac{f}{g}$  est continue en  $a$ .

**Définition 2.2.3** Soient  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(I) \subset J$ . On note :

$$\begin{aligned} g \circ f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.4** Soient  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $g$  une fonction continue en  $y = f(a)$ , alors la fonction  $h = g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Définition 2.2.5 (Continuité sur un intervalle)**

- On dit que  $f$  est continue sur l'intervalle  $I = ]a; b[$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .
- On dit que  $f$  est continue sur l'intervalle  $J = [a; b]$  si et seulement si  $f$  est continue sur  $I = ]a; b[$ , continue à droite en  $a$  et continue à gauche en  $b$ .

**Remarque** : Graphiquement, la continuité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  correspond au fait que l'on peut tracer la représentation graphique de  $f$  sur  $I$  d'un **trait de crayon continu**.)

**Contre exemple** : Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{pour } x < 1 \\ f(x) = 3 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$   
 $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ , car  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ ,  $f$  n'a donc pas de limite en 1, et donc  $f$  n'est pas continue au point 1.

### 2.2.2 Prolongement par continuité

**Définition 2.2.6 (Prolongement continu)** Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant le réel  $a$ , sauf en  $a$ , et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  la fonction  $g$  définie par :  $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x \neq a \\ g(a) = l \end{cases}$  s'appelle prolongement continu de  $f$ .

**Exemple 2.2.1** Soit  $g$  définie par :  $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin x}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

$g$  est le prolongement continu de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

### 2.2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 2.2.7** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux points de  $I$  tels que  $a < b$  et  $f(a) \leq f(b)$ .

Alors

$$\forall y \in [f(a); f(b)], \exists c \in [a; b] / y = f(c)$$

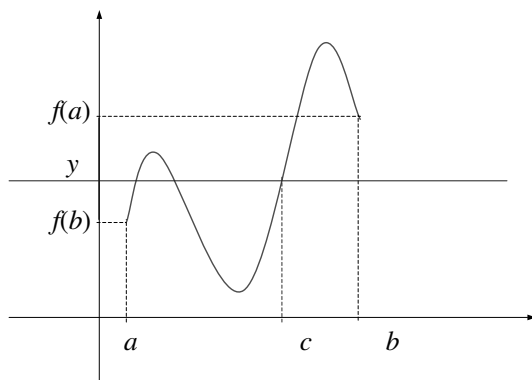


FIGURE 2.4 – Théorème des valeurs intermédiaires

### 2.2.4 Fonction continue strictement monotone

**Théorème 2.2.8** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

En particulier si  $f$  est continue et croissante [respectivement décroissante] sur  $[a; b]$ , alors  $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$  [respectivement  $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$ ]

**Théorème 2.2.9** Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $[a; b]$  alors  $f$  établit une bijection de  $[a; b]$  sur  $[f(a); f(b)]$  (ou  $[f(b); f(a)]$ ).

**Théorème 2.2.10** Toute fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  est bornée et atteint ses bornes

## 2.3 Dérivation

### 2.3.1 Définitions

**Définition 2.3.1** une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  contenant le réel  $a$  est dérivable au point  $a$  s'il existe un réel  $A$  tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A$$

ou encore

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

Le nombre  $A$  est appelé nombre dérivé de la fonction  $f$  au point  $a$ .

**Définition 2.3.2** Si  $f$  est une fonction dérivable en tout point d'un intervalle  $I$  ouvert, on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$ .  $f$  étant une fonction dérivable sur  $I$ , la fonction, notée  $f'$ , qui à tout  $x$  de  $I$  associe le nombre dérivé de  $f$  au point  $x$ , s'appelle fonction dérivée de  $f$ .

**Remarque 2.3.1** Si  $f$  est une fonction de la variable réelle  $x$ ,  $f'$  se note aussi  $\frac{df}{dx}$

Pour tout  $a \in I$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

on peut donc écrire :

$$f(a+h) - f(a) = h(f'(a) + \varphi(h)) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

ou encore :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Cette écriture est appelée développement limité d'ordre 1 de  $f$  en  $a$ .

**Exemple 2.3.1** soit  $f : x \mapsto \sqrt{x}$

On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)}$$

Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h + h\varphi(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

On en déduit que, pour  $h$  voisin de 0

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$$

**Théorème 2.3.3** Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$

**ATTENTION** : la réciproque de ce théorème est fausse !

### 2.3.2 Interprétation géométrique

Soient  $A(a; f(a))$  et  $M(a+h; f(a+h))$  deux points de la courbe  $C_f$  représentative de  $f$ . Le coefficient directeur de la droite  $(AM)$  est égal à :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque  $h$  tend vers 0, le point  $M$  tend vers le point  $A$  et la droite  $(AM)$  devient donc tangente à la courbe, et son coefficient directeur devient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

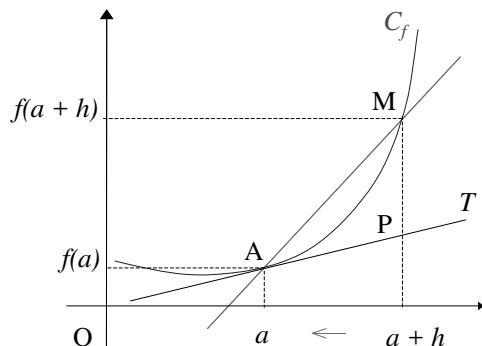


FIGURE 2.5 – Interprétation géométrique

On obtient donc une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse  $a$  : cette droite passe par le point  $A(a, f(a))$  et admet comme coefficient directeur  $f'(a)$ .

On obtient :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

### 2.3.3 Nombre dérivé à gauche, à droite

La fonction  $f : x \mapsto |x(x - 1)|$  est dérivable sur  $[0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ . Mais au point  $x = 1$ , il n'est pas possible de conclure.

On calcule

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(1+h)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-(1+h)) = -1$$

La fonction  $f$  n'est pas dérivable au point 1, car les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement en ce point sont différentes, il n'existe donc pas de nombre dérivé au point 1. La courbe admet au point 1 deux demi-tangentes de coefficients directeurs 1 et  $-1$ .

**Définition 2.3.4** Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  contenant le réel  $a$  est dérivable à droite [respectivement à gauche] en  $a$  si et seulement si  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  [respectivement  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ] existe et est finie.

Cette limite est alors notée  $f'_d(a)$  [respectivement  $f'_g(a)$ ]

$f'_d(a)$  et  $f'_g(a)$  sont les coefficients directeurs des demi-tangentes au point  $a$ .

**Théorème 2.3.5** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant le réel  $a$ ,  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$  et  $f'_d(a) = f'_g(a)$ .

De plus, sous ces hypothèses, on a :  $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$ .

**Définition 2.3.6** Si  $f$  est une fonction dérivable en tout point d'un intervalle  $I = ]a; b[$ , dérivable à gauche en  $b$  et à droite en  $a$ , on dit que  $f$  est dérivable sur  $J = [a; b]$ .

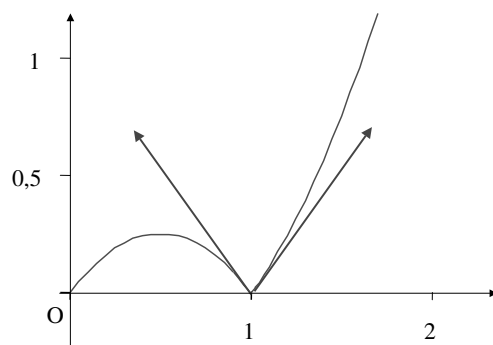


FIGURE 2.6 – Nombre dérivé à gauche, à droite

### 2.3.4 Tableaux des fonctions dérivées

#### • Opérations

$u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur  $D$ ,  $k$  est une constante réelle.

fonction	dérivée	commentaire
$u + v$	$u' + v'$	dérivable sur $D$
$ku$	$ku'$	dérivable sur $D$
$uv$	$vu' + uv'$	dérivable sur $D$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	dérivable sur $D$ , si $v$ ne s'annule pas sur $D$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$	dérivable sur $D$ , si $v$ ne s'annule pas sur $D$

#### • Fonctions usuelles

fonction définie par $f(x)$	fonction dérivée : $f'(x)$	domaine de dérivabilité
$k$ ( $k$ constante réelle)	0	$\mathbb{R}$
$x^p$ ( $p \in \mathbb{Z}$ )	$px^{p-1}$	$\mathbb{R}$ si $p > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $p < 0$
$x^{\frac{1}{q}}$ ( $q \in \mathbb{Q}_+^*$ )	$\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$	$\mathbb{R}_+$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\text{Ch}x$	$\mathbb{R}$
$\text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\text{Sh}x$	$\mathbb{R}$
$\text{Th}x = \frac{\text{Sh}x}{\text{Ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$	$\frac{1}{\text{Ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$

### 2.3.5 Dérivées successives

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

$f'$  est la dérivée première de  $f$ , on la note aussi  $f^{(1)}$  ou encore  $\frac{df}{dx}$

si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , sa dérivée  $f''$  est appelée fonction dérivée seconde de  $f$ , on la note aussi  $f^{(2)}$  ou encore  $\frac{d^2f}{dx^2}$

Par itération, la fonction dérivée d'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), notée  $f^{(n)}$ , est la dérivée de la fonction dérivée d'ordre  $n-1$ . On la note aussi  $\frac{d^n f}{dx^n}$ . On dit alors que  $f$  est  $n$  fois dérivable.

### 2.3.6 Dérivée d'une fonction composée

**Théorème 2.3.7** Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant  $x_0$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  contenant  $u(x_0)$ . Si  $u$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $y_0 = u(x_0)$  alors la fonction  $f = g \circ u$  est dérivable en  $x_0$  et :  $f'(x_0) = g'(u(x_0)) \times u'(x_0)$ .

Si  $u$  est dérivable sur  $I$ , si  $g$  est dérivable sur  $J$  et si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $u(x)$  appartient à  $J$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$ , et pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$

On note

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) u'$$

Démonstration : en supposant que si  $x \neq x_0$  on a  $u(x) \neq u(x_0)$ , on peut alors écrire :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g[u(x)] - g[u(x_0)]}{x - x_0} = \frac{g[u(x)] - g[u(x_0)]}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

$u$  étant dérivable en  $x_0$ , on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$$

de plus,  $u$  étant dérivable en  $x_0$ ,  $u$  est continue en  $x_0$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g[u(x)] - g[u(x_0)]}{u(x) - u(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$$

Finalement

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \times u'(x_0)$$

**Proposition 2.3.1** En particulier,  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$ , les fonctions suivantes sont dérivables sur  $I$  :

- a . Pour  $p \in \mathbb{Z}$ , si  $f(x) = [u(x)]^p$ , alors  $f'(x) = p[u(x)]^{p-1} \times u'(x)$ . (avec  $u(x) \neq 0$  sur  $I$ , lorsque  $p < 0$ )
- b . Pour  $q \in \mathbb{Q}_+^*$ , si  $f(x) = [u(x)]^{\frac{1}{q}}$ , alors  $f'(x) = \frac{1}{q}[u(x)]^{\frac{1}{q}-1} \times u'(x)$ . (avec  $u(x) > 0$  sur  $I$ )
- c . si  $f(x) = e^{u(x)}$  alors  $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ .
- d . si  $f(x) = \ln u(x)$  alors  $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ , avec  $u(x) > 0$  sur  $I$ .

### Exemple 2.3.2

- $f(x) = \cos^3 x$ ,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$f'(x) = 3\cos^2 x \times (-\sin x) = -3\sin x \cos^2 x$$

- $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ ,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$f'(x) = -\sin(x^2 + 1) \times 2x = -2x \sin(x^2 + 1)$$

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ ,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- $f(x) = e^{x^2+1}$ ,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$f'(x) = 2xe^{x^2+1}$$

### 2.3.7 Variations des fonctions

**Théorème 2.3.8** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  inclus dans  $D_f$ .

- Si  $f' > 0$  sur  $I$ , sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$  ;
- Si  $f' < 0$  sur  $I$ , sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  ;
- Si  $f' = 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

L'étude des variations d'une fonction dérivable est donc la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant (on dit que sur ces intervalles, la fonction est monotone).

### 2.3.8 Extremum d'une fonction

**Définition 2.3.9** Une fonction  $f$  admet, au point  $x_0$ , un maximum local [respectivement minimum local]  $f(x_0)$  sur l'intervalle  $I$  ouvert inclus dans son ensemble de définition et contenant  $x_0$ , lorsque, pour tout  $x$  réel de  $I$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$  [respectivement  $f(x) \geq f(x_0)$ ]

On appelle extremum local un minimum ou maximum local.

**Théorème 2.3.10** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  un point de  $I$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ . Si la dérivée  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe, alors  $f(x_0)$  est un extremum local de  $f$  sur  $I$ .

**Remarque 2.3.2 ATTENTION :** la fonction  $f : x \mapsto |x|$  n'est pas dérivable en 0, mais admet un minimum local (0) en 0.

Et la fonction  $g : x \mapsto x^3$  n'admet pas d'extremum au point 0, pourtant  $g'(0) = 0$

### 2.3.9 Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective

**Théorème 2.3.11** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ . Si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) > 0$  [ou bien  $f'(x) < 0$ ], alors  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  et l'application réciproque  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(I)$  et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

**Application :** dérivées des réciproques des fonctions trigonométriques

- La fonction arcsin est une bijection dérivable de  $] -1; 1[$  sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  et

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La fonction arccos est une bijection dérivable de  $] -1; 1[$  sur  $]0; \pi[$  et

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La fonction arctan est une bijection dérivable de  $\mathbb{R}$  sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  et

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

**Application** : dérivées des réciproques des fonctions hyperboliques

- **Fonction argument sinus hyperbolique** : la fonction  $\text{Sh}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle admet donc une fonction réciproque notée  $\arg\text{Sh}$ , définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} y = \arg\text{Sh}x \\ x \in ]-\infty; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{Sh}y \\ y \in ]-\infty; +\infty[ \end{cases}$$

Après calcul, on obtient une expression logarithmique de cette fonction, sous la forme :

$$\arg\text{Sh}x = \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right)$$

Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on obtient :

$$\arg\text{Sh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

- **Fonction argument cosinus hyperbolique** : de même la fonction  $\text{Ch}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1; +\infty[$ . Elle admet donc une fonction réciproque notée  $\arg\text{Ch}$ , définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} y = \arg\text{Ch}x \\ x \in ]1; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{Ch}y \\ y \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

Après calcul, on obtient une expression logarithmique de cette fonction, sous la forme :

$$\arg\text{Ch}x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \text{ avec } x \geq 1$$

Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition  $[1; +\infty[$  et on obtient :

$$\arg\text{Ch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- **Fonction argument tangente hyperbolique** : de même la fonction  $\text{Th}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1; 1[$ . Elle admet donc une fonction réciproque notée  $\arg\text{Th}$ , définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} y = \arg\text{Th}x \\ x \in ]-1; 1[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{Th}y \\ y \in ]-\infty; +\infty[ \end{cases}$$

Après calcul, on obtient une expression logarithmique de cette fonction, sous la forme :

$$\arg\text{Th}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \text{ avec } -1 < x < 1$$

Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition  $] -1; 1[$  et on obtient :

$$\arg\text{Th}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

### 2.3.10 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

**Théorème 2.3.12 (de Rolle)** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\bar{I} = [a; b]$ , dérivable sur  $I = ]a; b[$  et telle que  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe  $c \in I$  tel que  $f'(c) = 0$

**Théorème 2.3.13 (des accroissements finis)** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\bar{I} = [a; b]$ , et dérivable sur  $I = ]a; b[$ .

Alors il existe  $c \in I$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

**Théorème 2.3.14 (Inégalité des accroissements finis)** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux points de  $I$  tels que  $a < b$ . S'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que, pour tout  $x$  de  $I$ , on ait :  $m < f'(x) < M$ , alors on a :

$$m(b - a) < f(b) - f(a) < M(b - a)$$



Pour démontrer ce théorème, il suffit d'étudier les variations de deux fonctions auxiliaires définies sur  $I$  :  $g(x) = f(x) - Mx$  et  $h(x) = f(x) - mx$ . En calculant les dérivées de  $g$  et  $h$ , on prouve aisément que  $g$  est décroissante et que  $h$  est croissante.

On en déduit que,

$$\text{si } a < b, \text{ alors : } g(a) > g(b)$$

c'est à dire :

$$f(a) - Ma > f(b) - Mb$$

ou encore :

$$f(b) - f(a) < M(b - a) \quad (\text{E1})$$

De même,

$$\text{si } a < b, \text{ alors : } h(a) < h(b)$$

c'est à dire :

$$f(a) - ma < f(b) - mb$$

ou encore :

$$f(b) - f(a) > m(b - a) \quad (\text{E2})$$

En utilisant (2.1) et (2.2), on obtient le théorème précédent

**Exemple 2.3.3** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$  par  $f(x) = \tan x$ .

On a  $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

Pour  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ , on a  $0 < \tan x < 1$ , car la fonction tangente est croissante sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$

Donc, pour  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ , on a  $0 < \tan^2 x < 1$

et donc  $1 < 1 + \tan^2 x < 2$

On en déduit que, pour  $b \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $1(b - 0) < \tan b - \tan 0 < 2(b - 0)$

Et donc : , pour  $b \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $b < \tan b < 2b$



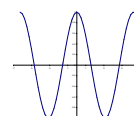
# Chapitre 3

## Fonctions usuelles

### 3.1 Fonctions trigonométriques et réciproques

#### 3.1.1 Fonctions circulaires

- *Fonction cosinus*  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$



Il s'agit d'une fonction paire, périodique de période  $2\Pi$ . Cosinus est infiniment différentiable.

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

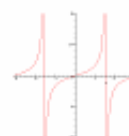
- *Fonction sinus*  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$



Il s'agit d'une fonction impaire, périodique de période  $2\Pi$ . Sinus est infiniment différentiable.

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

- *Fonction tangente*  $\begin{cases} \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$

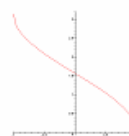


Il s'agit d'une fonction impaire, périodique de période  $\pi$ . Tangente est infiniment différentiable.

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = 1 + \tan^2 x$$

#### 3.1.2 Fonctions circulaires réciproques

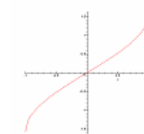
- *Fonction Arcosinus*  $\begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ x \mapsto \arccos x \end{cases}$



Par définition  $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$  et  $y \in [0, \Pi]$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- *Fonction Arcsinus*  $\begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x \mapsto \arcsin x \end{cases}$



Par définition  $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$  et  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- *Fonction Arctan*  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x \mapsto \arctan x \end{cases}$



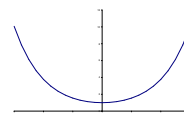
Par définition  $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$  et  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

## 3.2 Fonctions hyperboliques et réciproques

### 3.2.1 Fonctions hyperboliques

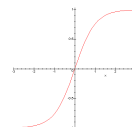
- *Fonction cosinus hyperbolique*  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$



Il s'agit d'une fonction strictement positive, paire, infiniment différentiable.

$$\frac{d(chx)}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

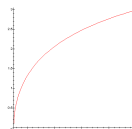
- *Fonction sinus hyperbolique*  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$



Il s'agit d'une fonction croissante, impaire, infiniment différentiable.

$$\frac{d(shx)}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

- *Fonction tangente hyperbolique*  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[ \\ x \mapsto thx = \frac{shx}{chx} \end{cases}$

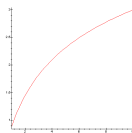


Il s'agit d'une fonction impaire, strictement croissante, infiniment différentiable

$$\frac{d(thx)}{dx} = 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$$

### 3.2.2 Fonctions hyperboliques réciproques

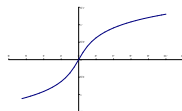
- *Fonction Argcosinus hyperbolique*  $\begin{cases} [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[ \\ x \mapsto Argchx = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{cases}$



Par définition  $y = \text{Argch}(x) \Leftrightarrow \text{ch}(y) = x$  et  $y \geq 0$

$$\frac{d(\text{Argch}x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

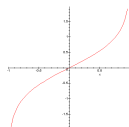
Fonction Argshinus hyperbolique  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Argsh}(x) = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{cases}$



Par définition  $y = \text{Argsh}(x) \Leftrightarrow \text{sh}(y) = x$

$$\frac{d(\text{Argsh}x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

• Fonction Argtangente hyperbolique  $\begin{cases} ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \end{cases}$



Par définition  $y = \text{Argth}(x) \Leftrightarrow \text{th}(y) = x$

$$\frac{d(\text{Argth}x)}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$



## Chapitre 4

# Développements Limités

### 4.1 Définition du développement limité

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie au voisinage du réel  $a$ .

S'il existe  $(n+1)$  constantes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  telles que, pour tout élément  $x \neq a$  de  $E$ , on puisse écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

où  $\varepsilon$  est une fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ , on dit que l'égalité ci-dessus est un **développement limité d'ordre  $n$  de la fonction  $f$  autour de  $a$  (ou en  $a$ ), souvent abrégé en  $DL_n(a)$ .**

D'une manière générale, la fonction  $\varepsilon$  dépend aussi du nombre réel  $a$ .

La fonction polynomiale  $a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$  est appelée **partie principale (ou régulière) du développement limité**, tandis que le terme  $(x-a)^n \varepsilon(x)$  est appelé **reste d'ordre  $n$  du développement limité**.

### 4.2 Unicité du développement limité

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction admettant un développement limité d'ordre  $n$  autour d'un point  $a$ . Ce développement est unique.

#### Démonstration

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

deux  $DL_n(a)$ .

Nous allons d'abord démontrer que  $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ .

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

Soit  $k$  le plus petit entier naturel tel que  $a_k \neq b_k$ . Alors, pour tout élément  $x \neq a$  de  $E$ , on peut écrire que

$$(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})(x-a) + \dots + (a_n - b_n)(x-a)^{n-k} + (x-a)^{n-k}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$$

Par suite, en calculant la limite de cette expression lorsque  $x$  tend vers  $a$ , on obtient que

$$a_k = b_k$$

ce qui est absurde. On a ainsi démontré que  $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ . Il découle immédiatement de ce résultat que pour tout élément  $x \neq a$  de  $E$  :  $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$ . D'où l'unicité du développement limité.

#### Remarque

Supposons que  $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$  soit le développement limité d'ordre  $n$  de la fonction  $f$  autour de  $a$ . Alors, pour tout entier naturel  $p < n$ , la fonction  $f$  admet un développement limité d'ordre  $p$  autour de  $a$  dont la partie principale est  $a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_p(x-a)^p$ .

### 4.3 Développement limité d'une fonction paire ou impaire

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  ayant zéro pour centre de symétrie et  $f : E \rightarrow F$  une fonction admettant  $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$  comme  $DL_n(0)$ .

Si  $f$  est fonction paire [ $f(x)=f(-x)$ ], les coefficients  $a_1, a_3, \dots$  dont l'indice est impair sont tous nuls.

Si  $f$  est fonction impaire [ $f(x)=-f(-x)$ ], les coefficients  $a_0, a_2, \dots$  dont l'indice est pair sont tous nuls.

#### Démonstration

Pour la démonstration, supposons que  $f$  soit une fonction paire, l'autre cas se traitant de façon analogue. Pour tout élément  $x \neq a$  de  $E$ , on peut écrire

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^n a_n x^n + x^n ((-1)^n \varepsilon(-x))$$

En constatant que  $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^n \varepsilon(-x) = 0$ , on obtient, grâce à l'unicité du développement limité, que les coefficients  $a_1, a_3, \dots$  dont l'indice est impair sont tous nuls.

### 4.4 Opérations algébriques sur les développements limités

Soient  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions admettant respectivement

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

comme développement limité d'ordre  $n$  autour de  $a$ . Alors,

- pour tout couple de nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la fonction  $\alpha f + \beta g$  admet un  $DL_n(a)$  dont la partie principale est

$$(\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)(x-a) + \dots + (\alpha a_n + \beta b_n)(x-a)^n$$

- la fonction  $fg$  admet un  $DL_n(a)$  dont la partie principale s'obtient en effectuant le produit

$$[a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n] [b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n]$$

et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

- si  $b_0 \neq 0$ , la fonction  $f/g$  admet un  $DL_n(a)$  dont la partie principale s'obtient en effectuant la division, suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre  $n$  de  $[a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n]$  par  $[b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n]$ .

**Exemple 4.4.1** Calculer la partie principale du développement limité d'ordre 4 autour de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$$

Nous pouvons effectuer la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 4 de  $(1+x^3)$  par  $(1+x^2)$ , ce qui donne :

Nous aurions pu également utiliser la méthode dite des "coefficients indéterminés".

Désignons par  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\varepsilon(x)$  le  $DL_4(0)$ . On peut écrire, pour tout  $x$  non nul :

$$1+x^3 = f(x).(1+x^2)$$

donc par unicité du développement limité

$$1+x^3 = a_0 + a_1x + (a_0+a_2)x^2 + (a_1+a_3)x^3 + (a_2+a_4)x^4$$

ce qui implique que

$$a_0 = 1 = a_1 + a_3; \quad a_1 = 0 = a_0 + a_2 = a_2 + a_4$$

soit en résolvant ce système

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = -1; \quad a_3 = 1; \quad a_4 = 1$$



$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
1 + x^3 \\
1 + x^2 \\
\hline
-x^2 + x^3 \\
-x^2 \quad -x^4 \\
\hline
x^3 + x^4 \\
x^3 \quad + x^5 \\
\hline
x^4 - x^5 \\
x^4 \quad + x^6 \\
\hline
-x^5 - x^6
\end{array}
&
\begin{array}{r}
1 + x^2 \\
\hline
1 - x^2 + x^3 + x^4
\end{array}
\end{array}$$

## 4.5 Développement limité d'une fonction composée

Soit  $f(x) = a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$  le  $DL_n(a)$  de la fonction  $f : E \rightarrow F$ . Soit  $G$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}$  contenant zéro et  $g(y) = g(0) + b_1y + \dots + b_ny^n + y^n \varepsilon_2(y)$  le  $DL_n(0)$  de la fonction  $g : G \rightarrow H$ .

Alors, si  $f(E) \subset G$ , la fonction composée  $g \circ f : E \rightarrow H$  admet un développement limité d'ordre  $n$  autour de  $a$ , dont la partie principale est :

$$\begin{aligned}
&g(0) + a_1b_1(x-a) + (a_2b_1 + a_1^2b_2)(x-a)^2 + (a_3b_1 + 2a_1a_2b_2 + a_1^3b_3)(x-a)^3 \\
&+ \dots + (a_nb_1 + \dots + a_1^n b_n)(x-a)^n
\end{aligned}$$

Cette expression s'obtient en substituant, dans la partie principale du développement limité de  $g$ ,  $y$  par la partie principale du développement limité de  $f$  et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

### Démonstration

Pour tout élément  $x \neq a$  de  $E$ , on peut écrire

$$g(f(x)) = g(0) + b_1f(x) + \dots + b_nf(x)^n + (f(x))^n \varepsilon_2(f(x))$$

soit

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(0) + b_1(a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)) + \dots \\ &\quad + b_n(a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x))^n \\ &\quad + (a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x))^n \varepsilon_2(a_1(x-a) + \dots \\ &\quad + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)) \end{aligned}$$

ce qui donne en développant

$$g(f(x)) = g(0) + a_1 b_1 (x-a) + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2)(x-a)^2 + \dots + (a_n b_1 + \dots + a_1^n b_n)(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_3(x)$$

On vérifie ensuite facilement que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_3(x) = 0$ . D'où le résultat.

**Exemple 4.5.1** Calculer le développement limité d'ordre 4 de la fonction  $f(x) = \ln(\cos x)$  autour de 0.

$$f(x) = \ln(\cos x - 1 + 1) = \ln(u + 1) \text{ avec } u = \cos x - 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} u = 0$$

$$u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)$$

et

$$\ln(u + 1) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4 \varepsilon_2(u)$$

en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 de :

$$\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right]^2 + \frac{1}{3} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right]^3 - \frac{1}{4} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right]^4$$

on obtient :

$$f(x) = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right] - \frac{x^4}{8} + x^4 \varepsilon_3(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon_3(x)$$

## 4.6 Formule de Taylor

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant le point  $a$  et  $f : I \rightarrow F$  une fonction  $(n+1)$  fois différentiable sur  $I$ . On peut alors associer à tout élément  $x$  de  $I$  un nombre réel  $0 < \theta_x < 1$ , dépendant à la fois de  $a$  et de  $x$ , tel que la relation suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(p)}(a) \frac{(x-a)^p}{p!} \\ &\quad + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a)) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Cette relation est appelée **formule de Taylor**. Il est d'usage d'appeler **formule de MacLaurin** la formule obtenue en remplaçant  $a$  par zéro dans celle de Taylor.

## 4.7 Développement limité d'une fonction $(n+1)$ fois différentiable

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant le point  $a$  et  $f : I \rightarrow F$  une fonction  $(n+1)$  fois différentiable sur  $I$ . On suppose également qu'il existe un nombre réel  $\alpha > 0$  et une constante  $M > 0$  tels que les relations  $x \in I$  et  $|x-a| \leq \alpha$  impliquent  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ .

Alors la formule de Taylor fournit le développement limité d'ordre  $n$  de la fonction  $f$  autour de  $a$ .

### Démonstration

La formule de Taylor est applicable à  $f$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad \exists \theta_x, 0 < \theta_x < 1 \text{ tel que} \\ f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(p)}(a) \frac{(x-a)^p}{p!} \\ &\quad + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a)) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in I$ , vérifiant  $|x - a| \leq \alpha$ ,  $|f^{(n+1)}(a + \theta_x(x - a))| \leq M$

En posant  $\varepsilon(x) = f^{(n+1)}(a + \theta_x(x - a)) \frac{(x - a)}{(n + 1)!}$ , on obtient  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

Ainsi  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x - a)^n}{n!} + (x - a)^n \varepsilon(x)$   
est le développement limité d'ordre  $n$  de la fonction  $f$  autour de  $a$ .

### Remarques

- Si  $f$  est continue en 0, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f$  admet un  $DL_0(0)$  dont la partie principale est  $f(0)$ .
- Si  $f$  est dérivable en 0, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f$  admet un  $DL_1(0)$  dont la partie principale est

$$f(0) + xf'(0)$$

- Une fonction peut admettre un  $DL_n(0)$  sans être  $n$  fois dérivable en 0. Ainsi la fonction  $f$  définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet un  $DL_2(0)$ , bien qu'elle ne soit pas deux fois dérivable en 0!

## 4.8 Table de développements limités autour de 0

L'ensemble des éléments ci-dessus nous permet de dresser une table des développements limités de fonctions “ usuelles ” autour de 0 (cf formulaire). Pour chercher un développement limité d'une fonction  $f$  autour d'un point  $a$ , on pourra translater la fonction en posant  $X = x - a$  pour se ramener au voisinage de 0 et utiliser la table 4.1.

## 4.9 Dérivation et intégration de développements limités

### 4.9.1 Dérivation

Si une fonction  $f$  admet un  $DL_n(a)$  sur  $I$  et si  $f'$  admet un  $DL_{n-1}(a)$  sur  $I$ , alors la partie principale du développement de  $f'$  s'obtient en dérivant terme à terme la partie principale du développement de  $f$ .

### 4.9.2 Intégration

Si une fonction  $f$  admet un  $DL_n(a)$  sur  $I$  alors  $F : x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$  admet un  $DL_{n+1}(a)$ . La partie principale du développement de celui-ci s'obtient en intégrant terme à terme la partie principale du développement de  $f$ .

**Exemple 4.9.1**  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$ ,

alors  $\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$

**Exemple 4.9.2**  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^{n+1} \varepsilon(x)$ ,

alors

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} = [\ln |1+t|]_0^x = \ln(1+x) \\ = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

## 4.10 Applications des développements limités

D'une manière générale, les développements limités permettent d'avoir une approximation “ locale ” d'une fonction autour d'un point. Quelques cas classiques d'utilisation des développements et de leur extension sont présentés ci-après.

TABLE 4.1 – développements limités

Fonctions	$DL_n(0)$
$e^x$	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
$\sin x$	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$
$\cos x$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^8 \varepsilon(x)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$
$\operatorname{ch} x$	$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$
$\operatorname{th} x$	$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + x^8 \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \dots + (-1)^n (n+1)x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\sqrt{1+x}$	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2.4}x^2 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n)}x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}x^n + x^n \varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{Q}$	$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\ln(1+x)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \dots + \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots(2p)(2p+1)}x^{2p+1} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$
$\operatorname{Argsh} x$	$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \dots + (-1)^p \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots(2p)(2p+1)}x^{2p+1} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$
$\operatorname{Arctg} x$	$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$
$\operatorname{Argth} x$	$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right) + x^{2p+2} \varepsilon(x)$

#### 4.10.1 Calcul de limites et résolution de “ formes indéterminées ”

Au voisinage de  $a$ , le premier terme non nul du développement limité de  $f$  fournit un équivalent de  $f(x)$ , ce qui peut permettre de trouver la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ , ou de résoudre certaines “ indéterminations ”.

**Exemple 4.10.1** Déterminer la limite, lorsque  $x$  tend vers 0 de la fonction

$$f : ]-\pi/2, 0] \cup ]0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2(1 - \cos x)}$$

On calcule les  $DL_4(0)$  du numérateur et du dénominateur :

$$\sin^2 x - x^2 \cos x = \frac{1}{6}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$x^2(1 - \cos x) = \frac{1}{2}x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

$$\text{Il suit } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}.$$

**Exemple 4.10.2** Déterminer la limite, lorsque  $x$  tend vers 0 de la fonction  $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1 + \sin x)}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 + x + x\varepsilon_1(x))} = e^{\frac{1}{x}(x + x\varepsilon_2(x))}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$

#### 4.10.2 Développement limité en $a$ à gauche et à droite

On peut considérer une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert dont une extrémité est  $a$  (au lieu d'un intervalle ouvert contenant  $a$ ). On peut ainsi former un  $DL_n(a)$  à droite et un  $DL_n(a)$  à gauche. Si  $f$  admet un  $DL_n(a)$ ,  $f$  admet un  $DL_n(a)$  à droite et un  $DL_n(a)$  à gauche et ces développements sont égaux. Par contre, une fonction peut admettre un  $DL_n(a)$  à droite et un  $DL_n(a)$  à gauche sans pour autant admettre de  $DL_n(a)$ .

#### 4.10.3 Développement limité au voisinage de l'infini

Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I = ]a, +\infty[$  admet un  $DL_n(+\infty)$  au voisinage de  $+\infty$ , si la fonction  $h : u \mapsto h(u) = f(\frac{1}{u})$  admet un  $DL_n(0)$  à droite.

$$h(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n + u^n \varepsilon(u); \text{ ce qui donne } f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon(\frac{1}{x}).$$

On définit de même le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $-\infty$ .

**Exemple 4.10.3** Déterminer le développement limité d'ordre 2 en  $+\infty$  de  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

$$\text{On pose } u = \frac{1}{x}, \text{ soit } x = \frac{1}{u} \text{ et on obtient } g(u) = \sqrt{\frac{1}{1-u}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + u^2\varepsilon(u)$$

$$\text{Finalement } f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$