



TD1 Maths, remise à niveau

J. Gergaud

▷ **Exercice 1.** soit $n \in \mathbf{N}^*$, on définit les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &\longmapsto (x_1 y_1, \dots, x_n y_n). \end{aligned}$$

1.1. Calculer $f(1, \dots, 1)$, $f(1, \dots, n)$, $f(n, \dots, 1)$ et $f(n, \dots, n)$.

1.2. Définir l'application $h : x \mapsto g(x, x)$.

1.3. Définir l'application $f \circ h$ et calculer $f \circ h(1, \dots, 1)$, $f \circ h(1, \dots, n)$ et $f \circ h(n, \dots, n)$.

1.4. Déterminer $(f \circ h)^{-1}(\{0\})$.

1.5. Définir l'application $f \circ g$ et déterminer $(f \circ g)^{-1}(\{0\})$.

▷ **Exercice 2.** Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.
Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

2.1. On considère tout d'abord le cas où $y_1 = \dots = y_n = 0$. Montrer que l'inégalité est vraie.

2.2. On considère maintenant le polynôme en λ défini par

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^n (x_k + \lambda y_k)^2.$$

1. Quel est le degré du polynôme P ?
2. Calculer son discriminant ;

3. En déduire l'inégalité.

▷ **Exercice 3.** On considère une urne U qui contient 5 boules blanche et 3 boules noires et on définit l'application

$$\begin{aligned} X : U &\longrightarrow \{0, 1\} \\ b &\longmapsto X(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \text{ est noire} \\ 0 & \text{si } b \text{ est blanche.} \end{cases} \end{aligned}$$

On réalise maintenant des tirages de n boules avec remise. On définit alors l'application

$$\begin{aligned} Y : U^n &\longrightarrow \{0, 1\}^n \\ (b_1, \dots, b_n) &\longmapsto Y(b_1, \dots, b_n) = (X(b_1), \dots, X(b_n)). \end{aligned}$$

et pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} Y_i : U^n &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (b_1, \dots, b_n) &\longmapsto Y_i(b_1, \dots, b_n) = X(b_i). \end{aligned}$$

3.1. On note maintenant S la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) = \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

Donner $S = f \circ Y$. Que représente cette application ?

3.2. Donner $\bar{X} = \frac{1}{n}S$. Que représente cette application

3.3. Déterminer les ensembles $S(U^n)$ et $\bar{X}(U^n)$

3.4. Si $n = 3$ donner $S^{-1}(\{2\})$, $S^{-1}(\{4\})$, $S^{-1}(\{0, 1\})$.