

Maths, remise à niveau

Chapitre 1 : Notions de base

Joseph GERGAUD

7 septembre 2022

- Probabilités (Coefficient 35 )
- Logique, Preuve de programme, Induction (Coefficient 45 )
- Math-Remise à Niveau (Coefficient 20 )

## Évaluation

- Passage au tableau pour les exercices (bonus de 3 points)
- Examen écrit

## Ressources

<https://gitlab.irit.fr/toc/mathn7/mise-a-niveau-apprentis/etudiants>

# Le but de ce chapitre est de rappeler les notions de base de mathématique

- 1.1. propositions, ensembles et prédicats
  - 1.1.1. Introduction
  - 1.1.2. Logique des propositions et Logique des Prédicats
  - 1.1.3. Raisonnements
- 1.2. Théorie des ensembles
  - 1.2.1. Définitions–Notations
  - 1.2.2. Cardinaux
  - 1.2.3. Opération sur les ensembles
- 1.3. Fonction, application
- 1.4. Indices, familles
  - 1.4.1. Indices et sommation
  - 1.4.2. Définitions
  - 1.4.3. Produits
- 1.5. Relation d'équivalence
  - 1.5.1. Définitions
- 1.6. Relation d'ordre
- 1.7. Équation

- i) " 7 est un entier pair" ;
- ii) " $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2}$ " ;
- iii) "toute fonction dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  est continue" ;
- iv) "on a  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ " ;
- v) "on a  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ " ;
- vi) "le nombre  $x$  est un carré" ;
- vii) "un triangle est rectangle si et seulement si le carré d'un de ses côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés".

Parmi ces affirmations, vous savez, ou vous pouvez justifier :

- que certaines, comme (ii), (iii) et (vii) sont vraies ;
- que d'autres, comme (i) sont fausses ;

- i) "7 est un entier pair" ;
- ii) " $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ " ;
- iii) "toute fonction dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  est continue" ;
- iv) "on a  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ " ;
- v) "on a  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ " ;
- vi) "le nombre  $x$  est un carré" ;
- vii) "un triangle est rectangle si et seulement si le carré d'un de ses côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés".

Mais d'autres dépendent de variables plus ou moins explicitées ; elles peuvent être vraies dans certains cas et fausses dans d'autres :

- l'affirmation iv) est vraie pour quelques valeurs de  $a$  et  $b$ , mais fausse dans une grande majorité de cas ;
- l'affirmation v) est vraie si  $a$  et  $b$  sont réels, mais fausse si  $a$  et  $b$  sont des matrices  $(2, 2)$

- i) " 7 est un entier pair" ;
  - ii) " $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2}$ " ;
  - iii) "toute fonction dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  est continue" ;
  - iv) "on a  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ " ;
  - v) "on a  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ " ;
  - vi) "le nombre  $x$  est un carré" ;
  - vii) "un triangle est rectangle si et seulement si le carré d'un de ses côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés".
- 
- l'affirmation vi) dépend évidemment de la valeur de  $x$ , mais elle dépend aussi de la nature des valeurs que peut prendre cette variable  $x$  :
    - Si  $x$  est dans  $\mathbf{N}$  c'est-à-dire si  $x$  est un entier naturel, cette affirmation n'est vraie que pour certaines valeurs de  $x$  ;
    - Si  $x$  est dans  $\mathbf{R}$ , l'ensemble des réels, cette affirmation n'est vraie que lorsque  $x$  est positif ou nul ;
    - Si  $x$  est dans  $\mathbf{C}$ , l'ensemble des complexes, cette affirmation est toujours vraie.

Pour une définition formelle des formules de la logique des propositions et de la logique des prédicats, voir le cours de Marc Pantel *Logique, Preuve de programme, Induction*

**Exemple 1.1.1.**

- i) "2 est un entier pair" est une formule vraie de la logique des propositions ;
- ii) " $(1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2000 + 1$ " est une formule vraie de la logique des propositions ;
- iii) " $1 = 2 +$ " n'est pas une formule de la logique des propositions.
- iv) " $x^2 - 1 = 0$ " est une formule de la logique des prédicats ; Cette formule est vraie si on donne la valeur 1 ou  $-1$  à  $x$ , elle est fausse dans les autres cas.

**Remarque 1.1.1.** Si  $P$  est une formule :

- on écrit la plupart du temps "on a  $P$ " ou "donc  $P$ ", au lieu de " $P$  est vraie" ou "donc  $P$  est vraie" ;
- de même on écrit "supposons  $P$ " au lieu de "supposons  $P$  vraie".

Nous rappelons la définition intuitive des quantificateurs "quel que soit" ( $\forall$ ) et "il existe" ( $\exists$ ). La formule

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

signifie que  $P(x)$  est vraie pour tout  $x$  élément de  $E$  et se lit : quel que soit (ou pour tout  $x$ )  $x$  appartenant à l'ensemble  $E$   $P(x)$  est vraie. . Tandis que l'expression

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

signifie que  $P(x)$  est vraie pour au moins un  $x$  élément de  $E$  et se lit : il existe  $x$  appartenant à l'ensemble  $E$  tel que  $P(x)$  soit vraie.



**Exercice 1.1.2.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, et le justifier.

- i)  $\forall x \in E, \exists y \in E, x \leq y$  ;
- ii)  $\exists y \in E, \forall x \in E, x \leq y$  ;
- iii)  $\forall x \in E, \exists y \in E, x < y$  ;
- iv)  $\forall y \in E, \forall x \in E, x \leq y$  ;



- i) L'assertion est vraie ; il suffit de prendre  $x = y$ .
- ii) L'assertion est vraie ; il suffit de prendre  $y = 5$ .
- iii) L'assertion est fausse car si  $x = 5$ ,  $\nexists y \in E, x < y$ .
- iv) L'assertion est fausse ; il suffit de prendre  $y = 1$  et  $x = 2$ .

Dans la vie courante le mot ou peut être utilisé avec des sens différents, comme par exemple :

- ou exclusif comme dans "fromage ou dessert" ;
- ou mathématique comme dans "s'il pleut ou s'il fait du vent, je ne sors pas" ;
- ou conditionnel comme dans "mange ta soupe ou tu iras au lit".

En mathématique ces mots ont un sens précis, ils sont définis par leurs tables de vérité, voir le cours de Marc Pantel *Logique, Preuve de programme, Induction* .

### Proposition 1.1.1

Si  $P$  et  $Q$  sont deux propositions alors

- i)  $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$  ;
- ii)  $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$  ;
- iii)  $P \iff Q$  si et seulement si  $(P \implies Q \text{ et } Q \implies P)$  ;
- iv) Si  $(P \implies Q \text{ et } Q \implies R)$  alors  $P \implies R$  ;
- v)  $(P \implies Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } Q)$  ;
- vi)  $(P \implies Q) \iff (\text{non } Q \implies \text{non } P)$  (propriété de la contraposée) ;
- vii)  $\text{non} ( " \forall x \in E P(x) " )$  est identique à  $" \exists x \in E \text{ non } P(x) "$  ;
- viii)  $\text{non} ( " \exists x \in E P(x) " )$  est identique à  $" \forall x \in E \text{ non } P(x) "$ .

► Démontrons par exemple la proposition v)

$P : Q$	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai

TABLE 1 – Table de vérité de  $P \implies Q$  et de  $\text{non } P \text{ ou } Q$ .

**Exemple 1.1.3.**

- i) La proposition " $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 = 0$ " peut se traduire en français par la phrase : "pour tout réel  $x$ , on a  $x^2 - 1 = 0$ ". Elle est évidemment fausse. Sa négation est "on peut trouver un réel  $x$  tel que  $x^2 - 1 \neq 0$ ", qui est donc vraie et qui s'écrit mathématiquement " $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 \neq 0$ ".
- ii) Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .
- Pour écrire que  $f$  est la fonction nulle on écrit : " $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$ ";
  - La négation de la proposition précédente est :  $f$  prend des valeurs non nulles et s'écrit " $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$ ";
  - Attention de ne pas confondre cette proposition avec " $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$ " qui exprime que  $f$  ne s'annule jamais et dont la négation est " $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$ ".

**Exercice 1.1.4.** Écrire la négation de " $(P \Rightarrow Q)$ " à l'aide des connecteurs non, et, ou.

► non  $(P \Rightarrow Q)$  est équivalent à  $(\text{non}(\text{non}P \text{ ou } Q))$  qui est équivalent à  $(P \text{ et non}Q)$ .

# Raisonnements

Soit à démontrer  $Q$ , sachant que l'on a l'hypothèse  $P$ , plusieurs types de démonstrations sont possibles

- **Raisonnement par contraposée**

Il suffit de supposer que l'on a  $(\text{non } Q)$  et de démontrer  $(\text{non } P)$ , car

$$(P \implies Q) \iff (\text{non } Q \implies \text{non } P).$$

- **Raisonnement par l'absurde**

Il suffit de supposer que  $(\text{non } P)$  est vraie et de montrer que l'on aboutit alors à une contradiction.

- **Raisonnement par récurrence**

Ce raisonnement ne s'utilise que pour démontrer des propriétés sur  $\mathbf{N}$ . Pour montrer qu'une propriété  $P$  est vraie sur  $\mathbf{N}$ , il suffit :

- i) de montrer que  $P$  est vraie pour  $n = n_0$ , c'est-à-dire à partir d'un certain rang ;
- ii) de supposer que  $P$  est vraie pour  $n$  et de montrer que  $P$  est vraie pour  $n + 1$ .

Ainsi, on démontre que la proposition  $P$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

**Exercice 1.1.5.** Montrer par l'absurde que  $\sqrt{2}$  est irrationnel, c'est-à-dire que l'on ne peut écrire  $\sqrt{2}$  comme le quotient de deux entiers.

► On suppose donc que  $\sqrt{2} = p/q$ ,  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$  (on peut toujours supposer que  $p$  et  $q$  ne sont pas simultanément pairs). Alors  $2 = (p/q)^2$ , soit  $p^2 = 2q^2$ . Ceci implique que  $p$  est pair :  $p = 2p_1$ . Par suite on a  $4p_1^2 = 2q^2$ , soit  $2p_1^2 = q^2$  et donc  $q$  est pair.

**Exemple 1.1.6.** Démontrons la propriété suivante : La somme des  $n$  premiers entiers est

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$



i) Montrons que la propriété est vraie pour  $n = 1$ . En effet

$$1 = \frac{1(2)}{2}.$$

ii) Supposons que la propriété  $P$  est vraie pour  $n$  et montrons que la propriété  $P$  est vraie pour  $n + 1$ . Si  $P$  est vraie pour  $n$ , cela signifie que

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

et calculons  $\sum_{k=1}^{n+1} k$ ,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{\text{par hypothèse de récurrence}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ce qui démontre que la proposition  $P$  pour  $n + 1$ .



**Exercice 1.1.7.** Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

► On note  $P(n)$  la propriété  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

- i) La propriété est vraie pour  $n = 1$
- ii) Supposons la vraie pour  $n$  et montrons là pour  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

## Théorie des ensembles

### Définition 1.2.1 – Ensemble–Élément

On appelle ensemble toute collection d'“objets” appelés éléments. Un ensemble ne contient pas de double.

- i)  $B = \{1, 4, 1\}$  n'est pas un ensemble
- ii)  $A = \{1, 4\}$  et  $B = \{4, 1\}$  définissent le même ensemble

On note en général les ensembles par des lettres majuscules et les éléments par des lettres minuscules. Un ensemble peut-être défini de deux manières différentes, soit par le dénombrement de tous ses éléments, soit en décrivant une propriété de tous ses éléments.

**Exemple 1.2.1.** L'ensemble des voyelles de la langue française peut-être défini par

- l'énumération de tous ses éléments :  $E = \{a, e, i, o, u, y\}$  ;
- l'énoncé d'une propriété :  $E = \{x, x \text{ est une voyelle}\}$  qui se lit “l'ensemble des  $x$  tel que  $x$  est une voyelle”.

### Notation 1.2.2

Si un élément  $a$  appartient à un ensemble  $E$  on écrit :  $a \in E$ , s'il n'appartient pas à l'ensemble  $E$  on a non  $(a \in E)$ ” qui se note aussi “ $a \notin E$ ”.

**Exemple 1.2.2.**  $E = \{x \in \mathbf{R}, 1 \leq x < 2\}$   $E$  est l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à 1 et strictement inférieurs à 2. On note aussi dans ce cas  $E = [1; 2[$  et  $E$  s'appelle aussi l'intervalle semi-ouvert à droite  $1; 2$ . On a aussi :  $1,02 \in E$  ;  $0,33 \notin E$  ;  $1 \in E$  ;  $2 \notin E$ .

**Remarque 1.2.1.** Dans l'exemple précédent  $\mathbf{R}$  représente l'ensemble des réels, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres :  $1/3 \in \mathbf{R}$ ,  $\pi \in \mathbf{R}$ ,  $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ ,  $-0,5 \in \mathbf{R}$ . On note aussi  $\mathbf{R} = ]-\infty; +\infty[$  : intervalle moins l'infini, plus l'infini.

### Notation 1.2.3 – Ensembles usuels

- Ensembles des entiers positifs ou nuls, on dit aussi ensemble des entiers naturels :  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ .
- Ensemble des entiers strictement positifs :  $\mathbf{N}^*$ . L'étoile indique que l'on a enlevé le zéro de l'ensemble.
- Ensemble des entiers positifs, négatifs ou nul. On dit aussi ensemble des entiers relatifs :  $\mathbf{Z}$ .
- Ensemble des nombres rationnels :  $\mathbf{Q} = \{\text{nombre } x, x = a/b, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}^*\}$ .
- Ensemble des réels  $\mathbf{R}$ .

**Définition 1.2.4 – Sous-ensemble**

On dit qu'un ensemble  $A$  est un sous-ensemble d'un ensemble  $B$ , ou est inclus dans  $B$ , si et seulement si tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$  :

$$A \subset B \iff \forall a \in A \quad a \in B.$$

**Définition 1.2.5 – Ensemble égaux**

Deux ensembles  $A$  et  $B$  sont égaux si et seulement si tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$  et réciproquement.

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

**Exemple 1.2.3.**

- i)  $A = \{1, 4\}$  et  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A \subset B$  mais  $B \not\subset A$
- ii)  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .

**Définition 1.2.6 – Ensemble vide**

On appelle ensemble vide et on note  $\emptyset$  (ou plus rarement  $\{\}$ ) l'ensemble qui ne contient aucun élément.

**Remarque 1.2.2.** On a toujours  $\emptyset \subset E$ .

**Définition 1.2.7 – Ensemble des parties d'un ensemble**

Soit  $E$  un ensemble. On appelle ensemble des parties de  $E$  et on note  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $E$ .

**Exemple 1.2.4.**

i) Soit  $E = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

ii) Soit  $E = \emptyset$ ,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}.$$

Attention  $\mathcal{P}(E) \neq \emptyset$ . En effet  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$  est l'ensemble qui contient 1 élément : l'ensemble vide.

**Définition 1.2.8 – Ensemble produit**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle ensemble produit de  $E$  et de  $F$  et on note  $E \times F$  (on lit  $E$  croix  $F$ ) l'ensemble de tous les couples  $(x, y)$  où  $x$  est un élément de  $E$  et  $y$  est un élément de  $F$ .

**Exemple 1.2.5.**  $E = \{a, b\}$  et  $F = \{1, 2, 3\}$

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

**Remarque 1.2.3.**

- i) Si  $E$  ou  $F$  est vide alors  $E \times F$  est vide ;
- ii) Si  $x \neq y$ , alors  $(x, y) \neq (y, x)$ .

**Définition 1.2.9 – Cardinal d'un ensemble**

On appelle cardinal d'un ensemble le "nombre" d'éléments de cet ensemble. Un ensemble de cardinal 1 s'appelle un singleton, un ensemble de cardinal 2 s'appelle une paire.

**Exemple 1.2.6.**

- i)  $A = \{1, 2, 7\}$  ;  $Card(A) = 3$ .
- ii)  $A = \emptyset$  ;  $Card(A) = 0$ .

**Remarque 1.2.4.** Un cardinal peut-être fini ou infini. Le cardinal de l'ensemble des entiers naturels est infini.



**Définition 1.2.10 – Ensemble fini–dénombrable–infini non dénombrable**

- i) Un ensemble  $E$  est dit fini si et seulement si son cardinal est fini.
- ii) Un ensemble  $E$  est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection de  $E$  sur  $\mathbf{N}$ , cf la définition (37)).
- iii) Un ensemble  $E$  est dit infini s'il n'est pas fini.

**Remarque 1.2.5.** Il est important de bien assimiler la définition ci-dessus car nous en aurons besoin en probabilités et en théorie de l'intégration où nous serons en effet souvent obligés de différencier ces trois cas.

**Exemple 1.2.7.**

- i)  $E = \{a, b, c\}$   $E$  est fini
- ii)  $E = \{x \in \mathbf{N}, x \text{ pair} \}$   $E$  est infini dénombrable. En effet

$$\begin{aligned} f : \mathbf{N} &\longrightarrow E \\ n &\longmapsto 2n \end{aligned}$$

est une bijection de  $\mathbf{N}$  sur  $E$  (bien que  $E$  soit inclus strictement dans  $\mathbf{N}$ ).

- iii)  $\mathbf{R}$  est un ensemble infini mais n'est pas dénombrable (admis).

**Définition 1.2.11 – Union de deux ensembles**

On appelle union des deux ensembles  $A$  et  $B$  et on note  $A \cup B$  (on lit  $A$  union  $B$ ) l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  :

$$A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

**Exemple 1.2.8.**  $A = \{a, b\}$  et  $B = \{b, c, d\}$ ,  $A \cup B = \{a, b, c, d\}$

**Définition 1.2.12 – Intersection de deux ensembles**

On appelle intersection des ensembles  $A$  et  $B$  et on note  $A \cap B$  (on lit  $A$  inter  $B$ ) l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  et à  $B$  :

$$A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

**Exemple 1.2.9.**  $A = \{a, b\}$  et  $B = \{b, c, d\}$

$$A \cap B = \{b\}$$

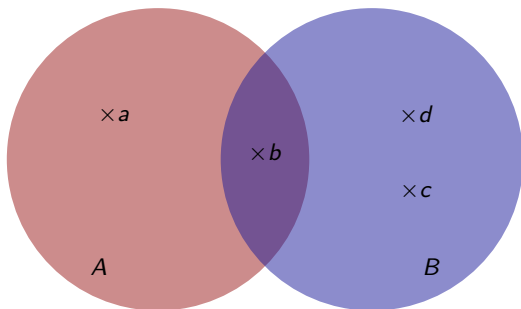


FIGURE 1 – *Diagramme de Venn.*

**Définition 1.2.13 – Ensembles disjoints**

Deux ensembles  $A$  et  $B$  sont dits disjoints si et seulement si ils n'ont aucun éléments en commun :  $A$  et  $B$  sont disjoints  $\iff A \cap B = \emptyset$ .

**Remarque 1.2.6.** On peut avoir des ensembles deux à deux non disjoints qui ont une intersection vide :  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $A_2 = \{2, 3\}$  et  $A_3 = \{1, 3\}$ ,

$$A_1 \cap A_2 = \{2\} \quad A_1 \cap A_3 = \{1\} \quad A_2 \cap A_3 = \{3\}, \text{ mais } A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

**Définition 1.2.14 – Complémentaire d'un ensemble**

Si  $A$  est inclus dans  $E$ , on appelle complémentaire de  $A$  dans  $E$ , l'ensemble  $B$  notée  $C_E A$  des éléments de  $E$  qui ne sont pas éléments de  $A$  :

$$B = C_E A = \{x, \text{ in } E / x \notin A\}.$$

**Notation 1.2.15**

On note aussi  $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

## Proposition 1.2.16

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles quelconques. Alors nous avons les propriétés suivantes :

- i)  $A \cup B = B \cup A$  commutativité;
- ii)  $A \cap B = B \cap A$  commutativité;
- iii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  associativité;
- iv)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  associativité;
- v)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  distributivité de l'intersection par rapport à la réunion;
- vi)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  distributivité de la réunion par rapport à l'intersection;
- vii) Si  $A \subset B$  et  $B \subset C$  alors  $A \subset C$  transitivité;
- viii) Si  $A \subset B$  et  $A \subset E$  et  $B \subset E$  alors  $C_E B \subset C_E A$ ;
- ix)  $A \cup \emptyset = A$ ;
- x)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- xi) Si  $A \subset E$  et  $B \subset E$  alors  $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$  première loi de Morgan;
- xii) Si  $A \subset E$  et  $B \subset E$  alors  $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$  deuxième loi de Morgan;
- xiii) Si  $A \subset E$  alors  $C_E C_E A = A$ ;
- xiv)  $(A \cap B) \cup (C_{A \cup B} A \cap B) = A \cup B$  et  
 $(A \cap B) \cap (C_{A \cup B} A \cap B) = \emptyset$
- xv)  $A \cup A = A$ ;
- xvi)  $A \cap A = A$ .

**Exercice 1.2.10.** Soient  $A, B, C$  trois ensembles tels que  $A \cup C \subset A \cup B$  et  $A \cap C \subset A \cap B$ . Montrez que  $C$  est inclus dans  $B$

► Soit  $x$  dans  $C$ , alors  $x \in A \cup C \subset A \cup B$ . Par suite  $x \in A$  ou  $x \in B$ . Nous avons donc deux cas

- Si  $x \in A$ , alors  $x \in A \cap C \subset A \cap B$  et donc  $x \in B$ ;
- Si  $x \notin A$ , alors  $x \in B$ .

Dans ces deux cas  $x \in B$ .

La notion de fonction est une notion importante car elle permet de représenter des objets que nous utilisons tous les jours.

- Si nous voulons par exemple étudier la taille de la population française nous travaillerons avec la fonction qui à chaque individu fait correspondre un nombre positif qui représentera sa taille en centimètres : la taille est *fonction* de l'individu.
- Si nous voulons étudier une réaction chimique, nous pouvons être intéressés par exemple par la concentration d'un certain produit "en fonction du temps" : la concentration est *fonction* du temps.

### Définition 1.3.1 – Fonction–Application

Une fonction ou application définie sur un ensemble  $E$  et à valeurs dans un ensemble  $F$  est une correspondance entre éléments de  $E$  et de  $F$  qui à tout élément de  $E$  associe un élément de  $F$  et un seul.

### Notation 1.3.2

Une application de  $E$  dans  $F$  sera notée de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x); \end{array}$$

- i)  $E$  s'appelle l'ensemble de départ de la fonction ou application ;
- ii)  $F$  s'appelle l'ensemble d'arrivée de la fonction ou application ;
- iii)  $f(x)$  s'appelle l'image de  $x$  par la fonction ou l'application  $f$  ;
- iv)  $x$  est un antécédent de  $y$  par la fonction ou application  $f$ .



**Remarque 1.3.1.** On fait parfois la distinction entre fonction et application :

- Une fonction associe à chaque élément de l'ensemble de départ  $E$  au plus un élément de l'ensemble d'arrivée  $F$ . On définit alors le domaine de définition de la fonction  $f$  par l'ensemble des éléments de l'espace de départ qui ont une image dans l'ensemble d'arrivée :  $\text{dom}f = \{x, \text{in } E / f(x) \text{ existe}\}$ . Dans ce cas on peut définir l'application

$$\begin{array}{ccc} g: & \text{dom}f & \longrightarrow F \\ & x & \longmapsto g(x) = f(x). \end{array}$$

- Dans ce cours, nous ne ferons pas de différence entre fonction et application.

**Remarque 1.3.2.**

- i) Nous distinguerons soigneusement la fonction ou l'application  $f$  et la transformée  $f(x)$  d'un élément  $x$  de  $E$ . Ce transformé est un élément de  $F$ .
- ii) Pour définir la règle qui à  $x$  élément de  $E$  associe  $f(x)$  élément de  $F$  nous utiliserons la notation suivante :  
 $x \longmapsto f(x)$ . Par suite nous définirons complètement une fonction  $f$  par :

$$\begin{array}{ccc} f: E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

**Exemple 1.3.1.**

$$f : \{Jean, Paul, Marie\} \longrightarrow \{bleu, marron\}$$

$$Jean \longmapsto bleu$$

$$Paul \longmapsto marron$$

$$Marie \longmapsto marron.$$

$f$  représente l'application qui à chacun des individus Jean, Paul, Marie associe la couleur de ses yeux. Nous pouvons ici représenter la fonction  $f$  par :

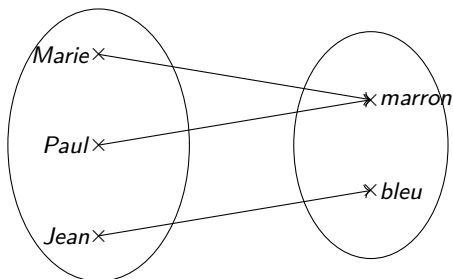


FIGURE 2 – *Fonction couleur des yeux.*

**Exemple 1.3.2.** On désire représenter la relation “est le père de”. Nous pouvons avoir par exemple :

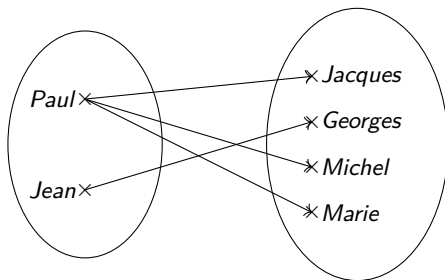


FIGURE 3 – *correspondance est le père de.*

Mais nous ne pouvons pas représenter ceci par une fonction car Paul n'a pas qu'un seul enfant, cf. la figure 3.

**Exemple 1.3.3.**

i)

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Nous avons alors :  $f(3) = 3^2 = 3 \times 3 = 9$  et  $f(-5) = (-5)^2 = 25$ .

ii)

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2x + 1. \end{array}$$

Nous avons alors :  $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$  et  $f(-5) = 2 \times (-5) + 1 = -9$ .

**Exercice 1.3.4.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .

1. Comment, à l'aide de  $f(x)$ , écrire que  $f$  est positive ?
2. Écrire la négation de l'assertion précédente.
3. Que pensez-vous de " $\forall x \in \mathbf{R}, ((f(x) \geq 0) \text{ ou } (f(x) \leq 0))$ " ?
4. Que pensez-vous de " $(\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq 0)$ " ?



1.  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$ .
2. La négation s'écrit  $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$ .
3. L'assertion affirme que pour tout nombre réel le nombre réel  $f(x)$  est (positif ou nul) ou est (négatif ou nul). Cette assertion est donc vraie.
4. Cette assertion signifie que  $f$  est positive ou nulle ou que  $f$  est négative ou nulle. Ce qui est en général faux.

### Définition 1.3.3 – Égalité de deux applications

Deux applications  $f$  et  $g$  sont dites égales si et seulement si

- i) on a l'égalité des ensembles de départ de  $f$  et  $g$  ;
- ii) on a l'égalité des ensembles d'arrivée de  $f$  et  $g$  ;
- iii) pour tout élément  $x$  de l'ensemble de départ commun on a  $f(x) = g(x)$ .

### Notation 1.3.4

On notera  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$ , l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .

### Définition 1.3.5 – Restriction, prolongement

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- i) Si  $A$  est une partie de  $E$ , la restriction de  $f$  à  $A$ , notée  $f|_A$  est l'application de  $A$  dans  $F$  définie par : pour tout  $x \in A$ ,  $f|_A(x) = f(x)$ .
- ii) On appelle prolongement de  $f$  toute application  $g$  définie sur un ensemble  $A$  contenant  $E$  vérifiant : pour tout  $x \in E$ ,  $g(x) = f(x)$ .

**Définition 1.3.6 – Injection, surjection, bijection**

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- i)  $f$  est une injection, on dit aussi que  $f$  est injective, si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

- ii)  $f$  est une surjection, on dit aussi que  $f$  est surjective, si et seulement si

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

- iii)  $f$  est une bijection, on dit aussi que  $f$  est bijective, si et seulement si  $f$  est injective et  $f$  est surjective.

**Remarque 1.3.3.**

- i) Dire que  $f$  est injective signifie que l'image de 2 éléments de l'ensemble de départ  $F$  par  $f$  donne 2 éléments de l'ensemble d'arrivé  $F$  différents.
- ii) Pour démontrer que  $f$  est injective, on utilise souvent dans la définition la contraposée de l'expression  $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ , c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \forall y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- iii) Dire que  $f$  est surjective, c'est dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée  $F$  possède au moins un antécédent.
- iv) Dire que  $f$  est une bijection signifie que tout élément de l'ensemble de d'arrivé possède un et un seul antécédent :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y$$

(le caractère ! dans l'expression ci-dessus se lit unique).



**Exemple 1.3.5.**

- i)  $f$  est une surjection, mais pas une injection ( $a$  possède deux antécédents 1 et 3 :  $f(1) = f(3) = a$ ).

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \{a, b\} \\ 1 &\longmapsto a \\ 2 &\longmapsto b \\ 3 &\longmapsto a \end{aligned}$$

- ii)  $f$  n'est pas une surjection ( $a$  ne possède pas d'antécédent), mais  $f$  est injective.

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \{a, b, c, d\} \\ 1 &\longmapsto b \\ 2 &\longmapsto c \\ 3 &\longmapsto d \end{aligned}$$

- iii)  $f$  est une bijection.

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \{a, b, c\} \\ 1 &\longmapsto b \\ 2 &\longmapsto a \\ 3 &\longmapsto c \end{aligned}$$

**Exercice 1.3.6.** Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ . On définit l'application

$$\begin{aligned} u_A: \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto X \cap A. \end{aligned}$$

1. Montrer que si  $A \neq E$  alors  $u_A$  n'est pas injective.
2. Montrer que  $u_A$  est surjective si et seulement si  $A = E$ . ►
1. Si  $A \neq E$  alors  $u_A(A) = A = u_A(E)$  et donc  $u_A$  n'est pas bijective.

2.
  - Implication.

Supposons donc que  $u_A$  soit surjective, alors il existe  $B \subset E$  tel que  $u_A(B) = B \cap A = E$ . Par suite  $A = E$ .

- Réciproque.

Si  $A = E$  alors  $u_A = id_{\mathcal{P}(E)}$  est une bijection, elle est donc surjective.

## Composée de 2 applications

### Définition 1.3.7 – Composée de 2 applications

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles et  $f$  et  $g$  deux applications respectivement de  $E$  dans  $F$  et de  $F$  dans  $G$ . On appelle composée des applications  $f$  et  $g$  l'application  $h = g \circ f$  définie par

$$\begin{aligned} h = g \circ f: \quad E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

On a alors le schéma de la figure 4.

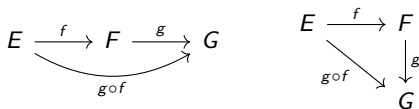


FIGURE 4 – Composée  $g \circ f$ .

**Exemple 1.3.7.** Soient

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto 2x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g: & \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ & y & \longmapsto g(y) = \sin y \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{ccc} g \circ f: & \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto (g \circ f)(x) = \sin(2x + 3). \end{array}$$

### Proposition 1.3.8

Si  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow H$  sont 3 applications alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

que l'on notera aussi  $h \circ g \circ f$ .

**Définition 1.3.9 – Application réciproque**

Soit  $f$  une bijection de  $E$  dans  $F$ , on appelle application réciproque l'application notée  $f^{-1}$  définie par :

$$\begin{aligned} f^{-1}: F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x, \end{aligned}$$

**Proposition 1.3.10**

- i) L'application réciproque est une bijection.
- ii)  $(f^{-1})^{-1} = f$ .
- iii) Si  $f$  est une bijection on a  $f^{-1} \circ f = id_E$  et  $f \circ f^{-1} = id_F$  où  $id_E$  et  $id_F$  sont respectivement les applications identité de  $E$  et  $F$ .

**Exercice 1.3.8.** On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^{2x+1}. \end{aligned}$$

1. Déterminer  $f^{-1}(\{1, e\})$ .
2. Soit  $y \in \mathbf{R}_+^*$ , déterminer  $f^{-1}(\{y\})$ .
3.  $f$  est-elle bijective ?



1. La fonction exponentielle est une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}_+^*$  de fonction réciproque  $\log$ , donc

$$f(x) = 1 \iff e^{2x+1} = 1 \iff 2x + 1 = \log 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

et

$$f(x) = e \iff e^{2x+1} = e \iff 2x + 1 = \log e = 1 \iff x = 0.$$

Par suite  $f^{-1}(\{1, e\}) = \{0, -1/2\}$ .

2. Soit  $y \in \mathbf{R}_+^*$ , la fonction  $\log$  étant bijective on a :

$$y = e^{2x+1} \iff \log y = 2x + 1 \iff x = \frac{-1 + \log y}{2}.$$

Donc

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{ \frac{-1 + \log y}{2} \right\}.$$

**Définition 1.3.11**

Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- i) Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on appelle ensemble image directe de  $A$  (ou image de  $A$ ) l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

- ii) Pour toute partie  $B$  de  $F$ , on appelle ensemble image réciproque de  $B$  l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x, \text{ in } E / f(x) \in B\}.$$

**Remarque 1.3.4.**

- i)  $f$  est une surjection si et seulement si  $f(E) = F$ .
- ii) Il ne faut pas confondre  $f^{-1}$  introduit ci-dessus avec l'application réciproque d'une bijection. En pratique, c'est le contexte qui donne la signification.
- iii)  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$  si et seulement si  $f$  est une application et  $f^{-1}(\{y\})$  est un singleton pour tout  $y \in F$ .

Les propriétés suivantes ne doivent pas être connues par cœur, mais elles doivent pouvoir être retrouvées rapidement :

### Proposition 1.3.12

- i)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  ;
- ii)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  ;
- iii)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  ;
- iv)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  ;
- v)  $f(f^{-1}(B)) \subset B$  ;
- vi)  $A \subset f^{-1}(f(A))$  ;
- vii)  $f^{-1}(\mathbb{C}_F B) = \mathbb{C}_E(f^{-1}(B))$ .

► Démontrons par exemple (ii). Par définition  $f^{-1}(A \cap B) = \{x \in E, f(x) \in A \cap B\} = \{x \in E, f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B\}$ . D'autre part  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in A\} \cap \{x \in E / f(x) \in B\}$ . D'où le résultat. ■



On peut démontrer d'autres résultats comme

### Théorème 1.3.13

Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est injective si et seulement si pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(\mathcal{E})$ ,  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

- i) Démontrons tout d'abord l'implication  $f$  injective  $\Rightarrow$  pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(\mathcal{E})$ ,  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ . On pose  $F' = f(E)$  et  $g$  l'application

$$\begin{aligned} g: E &\longrightarrow F' \\ x &\longmapsto g(x) = f(x). \end{aligned}$$

Alors  $f$  est injective si et seulement si  $g$  est une bijection. Posons maintenant  $h = g^{-1}$  alors pour tout  $A$  et  $B$  on a  $h^{-1}(A \cap B) = h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$ . Mais  $h^{-1} = g$  et pour tout sous-ensemble  $A$  de  $E$ ,  $f(A) = g(A)$ , d'où le résultat.

- ii) Réciproque. Supposons donc que l'on ait la propriété : pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(\mathcal{E})$ ,  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éléments distincts de  $E$  et posons  $A = \{x\}$  et  $B = \{y\}$ , alors  $A \cap B = \emptyset$  et donc  $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ . Par suite  $f(A) \cap f(B) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} = \emptyset$ , donc  $f(x) \neq f(y)$ . ■

**Exercice 1.3.9.** Soit  $u \in \mathcal{F}(E, F)$ .

1. Montrer que pour tout  $A \subset E, A \subset u^{-1}(u(A))$ .
2. Pour  $B \subset F$ , comparer  $B$  et  $u(u^{-1}(B))$ .
3. Montrer que  $u$  est injective si et seulement si pour tout  $A \subset E, A = u^{-1}(u(A))$ .



1.
  - Si  $A = \emptyset$ , alors on a bien trivialement  $\emptyset \subset E, \emptyset \subset u^{-1}(u(\emptyset))$
  - Soit  $x \in A$ , alors  $u(x) \in u(A)$  et donc  $x \in u^{-1}(u(A))$ .
2. Montrons que  $u(u^{-1}(B)) \subset B$ .
  - Si  $u^{-1}(B) = \emptyset$  alors on a  $u(\emptyset) = \emptyset \subset B$ .
  - Supposons donc que  $u^{-1}(B) \neq \emptyset$ , et soit  $x \in u(u^{-1}(B))$ , alors  $x = u(y)$  avec  $y \in u^{-1}(B)$ , mais alors  $u(y) = x \in B$ .

**Remarque 1.3.5.** Dans le cas général on ne peut rien dire de plus. En effet si on considère une application non surjective et  $B = \{b\}$  avec  $b \notin \text{Im}(u)$  alors  $u(u^{-1}(B)) = \emptyset$  et l'inclusion est stricte.

3.
  - Montrons tout d'abord l'implication  $u$  injective  $\Rightarrow$  pour tout  $A \subset E, A = u^{-1}(u(A))$ .  
On sait grâce à la première question que l'on a toujours  $A \subset u^{-1}(u(A))$ . Il suffit donc de montrer l'inclusion inverse  $u^{-1}(u(A)) \subset A$ . Si  $A = \emptyset$ , le résultat est immédiat. Soit donc  $x \in u^{-1}(u(A))$ , alors  $u(x) \in u(A)$ , ce qui signifie qu'il existe  $y \in A$  tel que  $u(x) = u(y)$ ; mais  $u$  est injective et donc  $x = y \in A$ .
  - Étudions maintenant la réciproque : pour tout  $A \subset E, A = u^{-1}(u(A)) \Rightarrow u$  est injective.  
Soit donc  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  tels que  $u(x) = u(y)$ . Posons  $A = \{x\}$ , alors  $y \in u^{-1}(u(A)) = A$ , d'où  $x = y$ .

## Indices, familles

Nous utiliserons souvent des notations avec des indices, ceci permet de noter différents éléments d'un même ensemble. Nous noterons par exemple  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  11 nombres réels.

Ces indices permettent aussi d'écrire des sommes et des produits de nombres. On écrira notamment

$$\sum_{k=1}^n x_k$$

pour la somme  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  et

$$\prod_{k=1}^n x_k$$

pour le produit  $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ .

Dans ces notations l'indice  $k$  joue un rôle opératoire. On l'appelle l'indice de sommation. Lorsque le contexte est suffisamment claire on écrit simplement :

$$\sum_k x_k \text{ et } \prod_k x_k$$

, et même parfois

$$\sum x_k \text{ et } \prod x_k$$

**Remarque 1.4.1.** Le produit des deux sommes  $\sum_{k=1}^n x_k$  et  $\sum_{l=1}^p y_l$  est une somme de  $np$  termes. En effet nous avons

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{l=1}^p y_l \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_k y_l \quad (1)$$

car

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_p) = x_1(y_1 + \cdots + y_p) + x_2(y_1 + \cdots + y_p) + \cdots + x_n(y_1 + \cdots + y_p).$$

**Remarque 1.4.2.** Dans l'expression de gauche de la formule (1) nous aurions pu prendre la même lettre pour les indices  $k$  et  $l$ , mais nous ne pouvons pas le faire dans l'expression de droite.

**Remarque 1.4.3.** On peut intervertir l'ordre des sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_k y_l &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^p x_k y_l \right) \\&= \sum_{k=1}^n (x_k y_1 + \cdots + x_k y_p) \\&= (x_1 y_1 + \cdots + x_1 y_p) + (x_2 y_1 + \cdots + x_2 y_p) + \cdots + (x_n y_1 + \cdots + x_n y_p) \\&= \sum_{l=1}^p \left( \sum_{k=1}^n x_k y_l \right) \\&= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n x_k y_l.\end{aligned}$$

**Remarque 1.4.4.** Nous avons :

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{l=1}^n x_l \right) = \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_k x_l = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k < l} x_k x_l.$$

Nous venons de voir le cas où il n'y a qu'un seul indice, mais souvent dans la pratique nous avons besoin de plusieurs indices. Nous noterons par exemple

$$(x_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,p}$$

les nombres  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}, x_{21}, \dots, x_{np}$ . La notation

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p x_{ij}$$

signifie  $x_{11} + \dots + x_{np}$ . On note parfois cette somme double :

$$\sum_{i,j} x_{ij}.$$

**Remarque 1.4.5.** La formule

$$\sum_{k=1}^n a_k x^k$$

signifie en général

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots + a_n x^n,$$

où

$$x^k = \underbrace{x \times \dots \times x}_{k \text{ fois}}.$$

**Définition 1.4.1 – Symbole de Kronecker**

On appelle symbole de Kronecker les nombres  $\delta_{ij}$  définis par :

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j,$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$



**Exercice 1.4.1.** On considère les données suivantes

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	-1	0	1	2	3
$y_i$	1	0	1	4	9

ici  $n = 5$ .

1. Calculer  $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$  et  $\bar{y} = (1/n) \sum_{i=1}^n y_i$ .

2. Calculer

$$SPE(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

$SPE$  signifie somme des produits des écarts.

3. Calculer

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}.$$



1.  $\bar{x} = 1$  et  $\bar{y} = 3$ .

2. Calculer

$$SPE(x, y) = 20.$$

3.

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 35 - 5 \times 1 \times 3 = 20.$$

**Exercice 1.4.2.** Soit  $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  et  $(y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  deux familles finies d'éléments de  $\mathbf{R}$ . On note  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  et  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  les moyennes arithmétiques correspondantes.

1. Démontrer que

$$SPE(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}.$$

2. En déduire que

$$SCE(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

*SCE* signifie somme des carrés des écarts.



1.

$$\begin{aligned}SPE(x, y) &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y}) \\&= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \bar{x} \bar{y} \\&= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} n \bar{x} - \bar{x} n \bar{y} + n \bar{x} \bar{y} \\&= \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}\end{aligned}$$

2. Il suffit de poser  $y_i = x_i$  pour tout  $i$ .

On supposera toujours ici que les ensemble  $I$  et  $J$  sont non vides.

### Définition 1.4.2 – Famille, sous-famille

Soient  $I$  et  $E$  deux ensembles. Une application  $f$  de  $I$  dans  $E$  s'appelle également une famille d'éléments de  $E$ . On utilise alors la notation indicielle :  $I$  s'appelle l'ensemble d'indices, l'image  $f(i)$  d'un élément  $i \in I$  se note  $x_i$  et la famille  $f$  est notée  $(x_i)_{i \in I}$ . Si  $J$  est un sous-ensemble de  $I$  la restriction de  $(x_i)_{i \in I}$  à  $J$ , notée  $(x_j)_{j \in J}$ , est appelée sous-famille de la famille  $(x_i)_{i \in I}$ .

### Remarque 1.4.6.

- i) Si  $I$  est fini, la famille est dite finie. Si  $I = \{1, \dots, n\}$ , on note cette famille  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ .
- ii) Si  $I = \mathbf{N}$ , la famille  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  s'appelle aussi une suite d'éléments de  $E$
- iii) Une suite extraite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une sous-famille de la forme  $(y_i)_{i \in \mathbf{N}}$  où  $y_i = x_{\varphi(i)}$  et  $\varphi$  est une application de  $\mathbf{N}$  à valeurs dans  $\mathbf{N}$  strictement croissante.

On utilisera souvent les familles d'ensembles c'est-à-dire une famille d'éléments de  $\mathcal{P}(E)$ . On notera une telle famille  $(A_i)_{i \in I}$ , les  $A_i$  étant des éléments de  $\mathcal{P}(E)$ , c'est-à-dire des sous-ensembles de  $E$ .

### Définition 1.4.3 – Union et intersection d'un nombre quelconque d'ensembles

Soit  $E$  un ensemble et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$

- i) on appelle union des ensembles  $A_i$ ,  $i \in I$ , l'ensemble noté  $\cup_{i \in I} A_i$  des éléments qui appartiennent à au moins un ensemble  $A_i$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x, \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

- ii) On appelle intersection des ensembles  $A_i$ ,  $i \in I$ , l'ensemble noté  $\cap_{i \in I} A_i$  des éléments qui appartiennent à tous les ensembles  $A_i$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x, \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

**Exemple 1.4.3.** Soit  $A_i = [i; i + 1[$   $i \in \mathbf{R}$

i) Si  $I = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$  alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = [0, 1[ \cup [1/2, 3/2[ \cup [1, 2[ \cup [3/2, 5/2[ \cup [2, 3[ = [0, 3[.$$

ii) Si  $I = \{2^{-p}, p \in \mathbf{N}\}$  alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} [2^{-p}, 2^{-p} + 1[ = ]0, 2[.$$

iii) Si  $I = [0, 1/2[$  alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = [0, 3/2[.$$

**Remarque 1.4.7.** Si  $\text{Card}(I) = 2$  on retrouve les définitions de l'union et de l'intersection de deux ensembles.

**Exercice 1.4.4.** Pour tout  $h \in \mathbf{R}_+^*$ , on pose  $J_h = ]-h, h[$ . Montrer que

$$\bigcap_{h \in \mathbf{R}_+^*} J_h = \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{h \in \mathbf{R}_+^*} J_h = \mathbf{R}.$$



- Montrons que  $\bigcap_{h \in \mathbf{R}_+^*} J_h = \{0\}$ . Pour tout  $h \neq 0$ ,  $0 \in J_h$ , par suite  $\{0\} \subset \bigcap_{h \in \mathbf{R}_+^*} J_h$ . Soit maintenant  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , alors  $\alpha \notin J_{|\alpha|/2}$  et donc  $\alpha \notin \bigcap_{h \in \mathbf{R}_+^*} J_h$ .
- Pour tout  $h \in \mathbf{R}$ ,  $J_h \subset \mathbf{R}$ , par suite  $\bigcup_{h \in \mathbf{R}_+^*} J_h \subset \mathbf{R}$ . Soit maintenant  $\alpha \in \mathbf{R}^*$ , alors  $\alpha \in J_{2|\alpha|}$  et donc  $\alpha \in \bigcup_{h \in \mathbf{R}_+^*} J_h \subset \mathbf{R}$ . Comme de plus  $0 \in J_1$ . On a bien que  $\bigcup_{h \in \mathbf{R}_+^*} J_h = \mathbf{R}$ .

**Exercice 1.4.5.** Soit  $I$  un ensemble d'indices et  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_i)_{i \in I}$  deux familles de parties d'un ensemble  $E$  telles que pour tout  $i \in I$ ,  $A_i \cup B_i = E$ . Démontrer que :

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right) = \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = E.$$

► On a  $\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right) \subset E$ . Il suffit donc de montrer l'inclusion inverse. Soit donc  $x \in E$  on a alors deux cas exclusifs :

- Soit il existe  $i \in I$  tel que  $x \in A_i$  ; alors  $x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right)$ .
- Soit pour tout  $i \in I$ ,  $x \notin A_i$ , mais alors pour tout  $i \in I$ ,  $x \in B_i$  et donc  $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$  et  $x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right)$ .

En échangeant les rôles des ensembles  $A_i$  et  $B_i$  on a la deuxième égalité.



**Exercice 1.4.6.** Soit  $(A_i)_{i \in I}$ ,  $I = \{1, \dots, n\}$  une famille finie de parties d'un ensemble  $E$ . En admettant les lois de Morgan de la propriété 27 démontrer que

1.

$$\bigcup_{i \in I} (\mathbb{C}_E A_i) = \mathbb{C}_E \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right);$$

2.

$$\bigcap_{i \in I} (\mathbb{C}_E A_i) = \mathbb{C}_E \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right).$$



1. La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ .

2. Idem.



3. On fait une récurrence sur  $n = \text{Card}(I)$ .

- i) L'assertion est vraie pour  $n = 2$  (il s'agit d'une loi de Morgan).
- ii) Supposons la proposition vraie pour  $n$  et montrons là pour  $n + 1$ . Soit  $i_0$  fixé dans  $I$ , on pose  $I_0 = \mathbb{C}_I i_0$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}_E \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) &= \mathbb{C}_E \left( \left( \bigcap_{i \in I_0} A_i \right) \cap A_{i_0} \right) \\
 &= \mathbb{C}_E \left( \bigcap_{i \in I_0} A_i \right) \cup \mathbb{C}_E A_{i_0} \quad \text{loi de Morgan} \\
 &= \left( \bigcup_{i \in I_0} \mathbb{C}_E A_i \right) \cup \mathbb{C}_E A_{i_0} \quad \text{hypothèse de récurrence, } \text{Card}(I_0) = n \\
 &= \bigcup_{i \in I} (\mathbb{C}_E A_i).
 \end{aligned}$$

4. On fait une récurrence sur  $n = \text{Card}(I)$ .

- i) L'assertion est vraie pour  $n = 2$  (il s'agit d'une loi de Morgan).
- ii) Supposons la proposition vraie pour  $n$  et montrons là pour  $n + 1$ . Soit  $i_0$  fixé dans  $I$ , on pose  $I_0 = \mathbb{C}_I i_0$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}_E \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) &= \mathbb{C}_E \left( \left( \bigcup_{i \in I_0} A_i \right) \cup A_{i_0} \right) \\
 &= \mathbb{C}_E \left( \bigcup_{i \in I_0} A_i \right) \cap \mathbb{C}_E A_{i_0} \quad \text{loi de Morgan} \\
 &= \left( \bigcap_{i \in I_0} \mathbb{C}_E A_i \right) \cap \mathbb{C}_E A_{i_0} \quad \text{hypothèse de récurrence, } \text{Card}(I_0) = n \\
 &= \bigcap_{i \in I} (\mathbb{C}_E A_i).
 \end{aligned}$$

## Notation 1.4.4

i) Si  $I = \{1, 2, \dots, p\}$  on note aussi :

$$\bigcup_{i \in I} = \bigcup_{i=1}^p$$

et

$$\bigcap_{i \in I} = \bigcap_{i=1}^p.$$

ii) Si  $I = \mathbf{N}$  on note aussi :

$$\bigcup_{i \in I} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} = \bigcup_{i=0}^{+\infty}$$

$$\bigcap_{i \in I} = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} = \bigcap_{i=0}^{+\infty}.$$

Les propriétés 27 et 46 se généralisent aux cas des familles d'ensembles.

### Proposition 1.4.5

Soient  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_j)_{j \in J}$  deux familles de parties d'un ensemble  $E$  alors :

i)

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j) ;$$

ii)

$$\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j) ;$$

iii)

$$\mathbb{C}_E \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{C}_E A_i) ;$$

iv)

$$\mathbb{C}_E \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{C}_E A_i) ;$$

v)

$$f^{-1} \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i) ;$$

vi)

$$f^{-1} \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) .$$

### Définition 1.4.6

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles, on appelle produit de la famille  $(A_i)_{i \in I}$  l'ensemble, noté  $\prod_{i \in I} A_i$ , des familles  $(x_i)_{i \in I}$  avec, pour tout  $i \in I$ ,  $x_i \in A_i$ .

### Proposition 1.4.7

- i) Si pour tout  $i$ ,  $A_i \neq \emptyset$ , alors  $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ .
- ii) La contraposée de la propriété précédente s'écrit :  
Si  $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$  alors il existe un indice  $i \in I$  tel que  $A_i = \emptyset$ .

### Notation 1.4.8

- i) Si pour tout  $i \in I$ ,  $A_i = E$ , on note  $\prod_{i \in I} A_i = E^I$ .
- ii) On retrouve ainsi la notation de l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ ,  $F^E = \mathcal{F}(E, F)$ .

**Remarque 1.4.8.** Si  $I = \{1, \dots, n\}$ , on note aussi  $(x_i)_{i=1, \dots, n} = (x_1, \dots, x_n)$  et

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n.$$

## Relation d'équivalence

### Définition 1.5.1 – Relation binaire

On appelle relation binaire sur un ensemble  $E$ , la donnée d'un sous-ensemble  $\Gamma$  de  $E \times E$ . On notera  $x R y$ , et on dira que l'élément  $x$  de  $E$  est en relation avec l'élément  $y$  de  $E$ , lorsque le couple  $(x, y)$  appartiendra à  $\Gamma$ .

### Définition 1.5.2 – Relation d'équivalence

Soit  $R$  une relation binaire sur  $E$ .  $R$  est une relation d'équivalence sur  $E$  si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées.

- i) Pour tout  $x \in E$ ,  $x R x$  (réflexivité) ;
- ii) pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x R y \Rightarrow y R x$  (symétrie) ;
- iii) Pour tout  $(x, y, z) \in E^3$ ,  $(x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z$  (transitivité).



**Définition 1.5.3 – Classe d'équivalence**

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ . On appelle classe d'équivalence de  $x$  l'ensemble noté  $[x]$  de tous les éléments de  $E$  qui sont en relation avec  $x$  :

$$[x] = \{y \in E, xRy\}.$$

**Proposition 1.5.4**

- i)  $[x] \neq \emptyset$  car  $x \in [x]$  ;
- ii) Si  $y \in [x]$  alors  $[y] = [x]$  ;
- iii) Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  alors  $[x] \cap [y] = \emptyset$  ou  $[x] = [y]$ .

- i) Évident.
- ii) Si  $y \in [x]$  alors  $xRy$  et donc  $yRx$  grâce à la symétrie et donc  $x \in [y]$ . Montrons maintenant que  $[y] \subset [x]$ . Soit donc  $z \in [y]$  alors  $yRz$ , mais comme  $y \in [x]$ , on a  $xRy$ , donc par transitivité  $xRz$  et  $z \in [x]$ . Il reste à montrer l'inclusion inverse, mais elle est immédiate. En effet si  $y \in [x]$ , on a vu qu'alors  $x \in [y]$ . Donc en intervertissant les rôles de  $x$  et  $y$  dans la démonstration de  $[y] \subset [x]$ , on démontre que  $[x] \subset [y]$ .
- iii) Si  $y \in [x]$  alors le point précédent dit que  $[x] = [y]$ . Si  $y \notin [x]$  alors  $[x] \cap [y] = \emptyset$ ; sinon il existe  $z \in [x] \cap [y]$  et donc  $xRz$  et  $yRz$ , mais cela implique que  $xRy$ , ce qui n'est pas possible.



**Définition 1.5.5 – Ensemble quotient**

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur l'ensemble non vide  $E$ . Le sous-ensemble de  $\mathcal{P}(E)$  constitué des classes d'équivalence s'appelle l'ensemble quotient de  $E$  par  $R$  et se note  $E/R$ .

**Définition 1.5.6 – Partition**

On appelle partition d'un ensemble  $E$ , tout sous-ensemble  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{P}(E)$  dont les éléments sont non vides, disjoints deux à deux et dont la réunion donne  $E$  :

- i)  $\forall A \in \mathcal{S}, A \neq \emptyset$  ;
- ii)  $\forall (A, B) \in \mathcal{S}^2, A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$  ;
- iii)  $\cup_{A \in \mathcal{S}} A = E$ .

## Théorème 1.5.7

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur l'ensemble non vide  $E$ , l'ensemble quotient  $E/R$  est une partition de  $E$  et réciproquement si  $S$  est une partition de  $E$  il existe une relation d'équivalence et une seule  $R$  telle que  $S = E/R$ .

► L'implication est immédiate. Pour la réciproque, soit donc  $S$  une partition de  $E$  non vide. Si  $R$  existe, les classes de  $R$  sont les éléments de  $S$ , par suite la relation doit être :

$$xRy \Leftrightarrow \exists A \in S, x \in A \text{ et } y \in A.$$

On a donc l'unicité. Pour l'existence, il suffit de vérifier que la relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence, ce qui est immédiat. ■

Si  $R$  est une relation d'équivalence sur  $E$  non vide, d'après ce qui précède pour tout  $x$  dans  $E$  il existe un unique élément  $A$  de  $E/R$  tel que  $x \in A$  ( $A = [x]$ ).

### Définition 1.5.8 – projection canonique

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur  $E$  non vide. On appelle projection canonique de  $E$  dans  $E/R$  l'application surjective

$$\begin{array}{rcl} p: & E & \longrightarrow E/R \\ & x & \longmapsto p(x) = [x]. \end{array}$$

**Exercice 1.5.1.** Sur  $\mathbf{R}$  on définit la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$x \mathcal{R} y \iff x^3 - y^3 = 3(x - y).$$

1.  $\mathcal{R}$  est-elle une relation d'équivalence ?
2. Dans l'affirmative, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , déterminer le cardinal de la classe d'équivalence de  $x$ .



# 1. Vérifions que $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence

## ■ Réflexivité

$$x \mathcal{R} x \iff 0 = 0.$$

## ■ Symétrie

$$x \mathcal{R} y \iff x^3 - y^3 = 3(x - y) \iff y^3 - x^3 = 3(y - x) \iff y \mathcal{R} x.$$

## ■ Transitivité

Supposons que  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z$ , alors

$$x^3 - y^3 = 3(x - y)$$

$$y^3 - z^3 = 3(y - z).$$

Donc en additionnant  $x^3 - z^3 = 3(x - z) \iff x \mathcal{R} z$ .

# 2. Soit $x$ fixé dans $\mathbb{R}$

$$y \in [x] \iff x^3 - y^3 = 3(x - y)$$

$$\iff (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0$$

$$\iff x = y \text{ ou } y^2 + xy + x^2 - 3 = 0.$$

Étudions donc les racines de  $y^2 + xy + x^2 - 3$  (polynôme en  $y$ ). Le discriminant est  $\Delta = 3(4 - x^2) = 3(2 - x)(2 + x)$ . D'où

- Si  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$  alors  $[x] = \{x\}$ .
- Si  $x = 2$ , alors  $[x] = [2] = \{2, -1\}$ .
- Si  $x = -2$ , alors  $[x] = [-2] = \{-2, 1\}$ .
- Si  $x \in ]-2, 2[, x \neq 1, x \neq -1$ , alors  $\text{Card}([x]) = 3$ .

**Exercice 1.5.2.** On définit sur  $\mathbf{Z}$  la relation binaire  $xRy \iff x - y$  est divisible par 9, c'est-à-dire

$$xRy \iff \exists p \in \mathbf{Z}, x - y = 9p.$$

1. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.
2. Donner les classes d'équivalence.
3. Montrer que tous les nombres  $10^n, n \in \mathbf{N}$  sont dans la même classe d'équivalence.
4. Soient  $[q]$  et  $[q']$  deux éléments de  $\mathbf{Z}/R$ . On définit l'addition de  $[q]$  et  $[q']$  par  $[q] + [q'] = [q + q']$ . Montrer que ceci est bien défini, c'est-à-dire que cette somme ne dépend pas des éléments de  $\mathbf{Z}$  pris dans les classes  $[q]$  et  $[q']$ .
5. Soit  $a = a_n \dots a_1 a_0 = a_n 10^n + \dots + a_1 10 + a_0$  où  $a_n, \dots, a_0$  sont des éléments de  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Montrer que  $[a] = [a_n + \dots + a_0]$ .





1. i) Réflexivité.  
Pour tout  $x \in \mathbf{Z}$ ,  $x - x = 0 = 0 \times 9$ , donc  $xRx$ .
- ii) Symétrie.  
Supposons que  $xRy$ , alors il existe  $p \in \mathbf{Z}$  tel que  $x - y = 9p$ , donc  $y - x = 9(-p)$  et  $yRx$ .
- iii) Soient  $x, y$  et  $z$  trois entiers relatifs tels que  $xRy$  et  $yRz$ , donc il existe  $p$  et  $p'$  dans  $\mathbf{Z}$  tels que  $x - y = 9p$  et  $y - z = 9p'$ . Par suite  $x - z = (x - y) + (y - z) = 9p + 9p' = 9(p + p')$  et  $xRz$ .

2. Il y a 9 classes d'équivalence :

- $[0] = \{x \in \mathbf{Z} / x = 9p\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 9.
- $[1] = \{x \in \mathbf{Z} / x = 9p + 1\}$ .
- $\vdots$
- $[8] = \{x \in \mathbf{Z} / x = 9p + 8\}$ .

$$3. 10^n = \underbrace{9 \dots 9}_{n \text{ fois}} + 1 = 9 \times \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ fois}} + 1 \in [1].$$

4. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments respectivement de  $[q]$  et  $[q']$ . On peut toujours considérer que  $q$  et  $q'$  sont dans  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Donc  $x = 9p + q$  et  $y = 9p' + q'$  et  $x + y = 9(p + p') + q + q' \in [q + q']$ .

5.

$$[a] = [10^n a_n] + \dots + [10a_1] + [a_0] = [a_n] + \dots + [a_1] + [a_0] = [a_n + \dots + a_0].$$

Nous venons de démontrer en particulier qu'un nombre entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

### Théorème 1.5.9 – Décomposition canonique d'une application

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On désigne par  $R$  la relation dans  $E$  définie par :

$$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Alors  $R$  est une relation d'équivalence ; si  $j$  désigne l'injection :

$$\begin{array}{ccc} j: & f(E) & \longrightarrow & F \\ & y & \longmapsto & j(y) = y, \end{array}$$

et si  $p$  désigne la projection canonique de  $E$  dans  $E/R$ , alors il existe une application unique  $\bar{f} : E/R \rightarrow f(E)$  telle que  $f = j \circ \bar{f} \circ p$ . De plus  $\bar{f}$  est une bijection.

► Le fait que  $R$  soit une relation d'équivalence est trivial. Par construction  $f$  est constante sur les classes d'équivalence de  $R$ . On définit alors  $\bar{f}$  par l'application qui à une classe d'équivalence associe cette valeur commune :  $\bar{f}([x]) = f(y)$  pour tout  $y \in [x]$  ; ceci montre l'existence et l'unicité. Montrons maintenant que  $\bar{f}$  est une bijection. Pour la surjectivité, il suffit d'écrire que pour tout  $y \in f(E)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$  et donc  $\bar{f}([x]) = f(x) = y$ . Pour l'injectivité considérons  $A$  et  $B$  dans  $E/R$  tels que  $\bar{f}(A) = \bar{f}(B)$  et soit  $x \in A$  et  $y \in B$ , alors  $f(x) = \bar{f}([x]) = \bar{f}(A) = \bar{f}(B) = \bar{f}([y]) = f(y)$  ; donc  $xRy$  et  $A = B$ . ■

On peut "visualiser" la décomposition canonique par le diagramme dit commutatif 5.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ p \downarrow & & \uparrow j \\ E/R & \xrightarrow{\bar{f}} & f(E) \end{array}$$

FIGURE 5 – Schéma commutatif de la décomposition canonique d'une application.

**Définition 1.6.1**

Soit  $R$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ . On dit que  $R$  est une relation d'ordre si et seulement si

- i) pour tout  $x \in E$ ,  $xRx$  (réflexivité) ;
- ii) pour tout  $(x, y, z) \in E^3$  ( $xRy$  et  $yRz$ )  $\Rightarrow xRz$  (transitivité) ;
- iii) pour tout  $(x, y) \in E^2$  ( $xRy$  et  $yRx$ )  $\Rightarrow x = y$  (antisymétrie).

Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit un ensemble ordonné.

**Notation 1.6.2**

Le plus souvent une relation d'ordre est notée  $\leq$ . Dans ce cas on note aussi ( $x \leq y$  et  $x \neq y$ ) par  $x < y$

**Définition 1.6.3 – Ensemble ordonné**

On appelle ensemble ordonné tout ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $R$ .

**Définition 1.6.4 – Ordre total**

Un ordre est dit total si  $x \neq y \Rightarrow ((x < y) \text{ ou } (y < x))$ . Il est dit partiel dans le cas contraire.

**Exemple 1.6.1.** Sur  $\mathbf{N}$  la relation  $\leq$  est un ordre total.

**Exemple 1.6.2.** Sur  $\mathcal{P}(E)$  la relation  $\subset$  est un ordre partiel si  $\text{card}(E) > 1$ .

**Définition 1.6.5 – plus grand élément, plus petit élément**

Soit  $E$  un ensemble ordonné, on appelle plus grand élément ou élément maximum (respectivement plus petit élément ou élément minimum), l'élément  $M = \text{Max } E$  (respectivement  $m = \text{Min } E$ ) de  $E$ , s'il existe, tel que pour tout  $x \in E$ ,  $x \leq M$  (respectivement  $m \leq x$ ).

**Remarque 1.6.1.** Dans la définition on parle de l'élément avec l'article défini et non d'un élément avec l'article indéfini. Ceci implique que cet élément s'il existe est unique. En effet si  $M_1$  et  $M_2$  sont deux plus grands éléments alors  $M_1 \leq M_2$  et  $M_2 \leq M_1$ , donc  $M_1 = M_2$ .

**Exemple 1.6.3.**

- Dans  $\mathcal{P}(E)$ ,  $E$  est un plus grand élément et  $\emptyset$  est un plus petit élément.
- L'ensemble  $\mathbf{N}$  possède 0 comme plus petit élément mais ne possède pas de plus grand élément.
- Toute partie non vide de  $\mathbf{N}$  admet un plus petit élément (cette propriété de  $\mathbf{N}$  est fondamentale).

**Définition 1.6.6 – Majorant, minorant, partie bornée**

Soient  $E$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie de  $E$ . Un élément  $M$  (respectivement  $m$ ) de  $E$  est dit un majorant (respectivement minorant) de  $A$  si et seulement si pour tout  $x \in A$ ,  $x \leq M$  (respectivement  $m \leq x$ ). Si  $A$  admet au moins un majorant (respectivement minorant) on dit que  $A$  est majorée (respectivement minorée).  $A$  est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

**Exemple 1.6.4.**

- Soit  $E$  un ensemble non vide et  $\mathcal{P}(E)$  ordonné par l'inclusion.  $A = \{\{x\}, x \in E\} \subset \mathcal{P}(E)$  est majoré dans  $\mathcal{P}(E)$  par  $E$ , mais il n'est pas majoré dans  $\mathcal{P}(E) \setminus E$ .
- Dans  $\mathbf{R}$ ,  $[0, 1[$  est majoré par 1, par 10 par 10 000.

**Définition 1.6.7 – borne sup, borne inf**

Soient  $E$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie de  $E$ . La borne sup (respectivement borne inf) de  $A$  dans  $E$  est, s'il existe, le plus grand élément noté  $\text{Sup}_E A$ , ou  $\text{Sup } A$  s'il n'y a pas de confusion possible, (respectivement plus petit élément noté  $\text{Inf}_E A$ , ou  $\text{Inf } A$ ) de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) de  $A$  dans  $E$ .

**Remarque 1.6.2.** Soit  $A$  une partie d'un ensemble totalement ordonné  $E$ . Un élément  $M$  est une borne supérieure de  $A$  dans  $E$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) Pour tout  $x \in A, x \leq M$  ( $M$  est un majorant de  $A$  dans  $E$ );
- ii) Pour tout  $y$  dans  $E$  tel que  $y < M$ , il existe  $x \in A$  tel que  $y < x$ .

**Exemple 1.6.5.**

- i) La borne sup de  $[0, 1[$  est 1.
- ii) La borne sup de  $[0, 1] \cup [3, 4]$  est 4.

**Remarque 1.6.3.** Si  $A$  possède un plus grand élément (respectivement un plus petit élément) alors c'est la borne sup de  $A$  (respectivement la borne inf de  $A$ ) :  $\text{Max } A = \text{Sup } A$  (respectivement  $\text{Min } A = \text{Inf } A$ ).



Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $E$  dans  $F$ . Résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$  c'est chercher les  $x \in E$  dont les images par  $f$  et  $g$  coïncident.

**Remarque 1.7.1.** Ici dans l'écriture  $f(x) = g(x)$  le signe  $=$  n'a pas la même signification que par exemple dans  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ . En effet cette dernière expression signifie que le membre de gauche est toujours égale au membre de droite, alors que lorsque l'on veut résoudre  $f(x) = g(x)$  on cherche  $x$  tel que l'égalité soit vraie.

Soit  $E = F = \mathbf{R}$  alors résoudre  $f(x) = g(x)$  est équivalent à résoudre  $h(x) = 0$  où :

$$\begin{aligned} h : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto h(x) = f(x) - g(x) \end{aligned}$$

Résolvons maintenant les équations dans  $\mathbf{R}$  du premier degré. Soit donc

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

où  $a$  et  $b$  sont fixés. Résoudre  $f(x) = 0$  conduit alors immédiatement aux deux cas suivants :

- i) Si  $a \neq 0$  alors  $S = \{-b/a\}$
- ii) Si  $a = 0$  alors
  - i) Si  $b \neq 0$  alors  $S = \emptyset$
  - ii) Si  $b = 0$  alors  $S = \mathbf{R}$

Résolvons maintenant les équations dans  $\mathbf{R}$  du deuxième degré. Soit donc

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c$$

- i) Si  $a = 0$  alors nous sommes ramenés au cas précédent.
- ii) Si  $a \neq 0$  alors

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Nous avons donc trois possibilités :

- i) Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  alors

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

et donc  $f(x) > 0$  pour tout  $x$ . Par suite  $S = \emptyset$ .

- ii) Si  $\Delta = 0$  alors  $S = \{-b/2a\}$

- iii) Si  $\Delta > 0$  alors  $\Delta = \delta^2$  avec  $\delta > 0$  et

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b - \delta}{2a} \right) \left( x + \frac{b + \delta}{2a} \right) \right]$$

il y a donc deux solutions

$$S = \left\{ \frac{-b + \delta}{2a}, \frac{-b - \delta}{2a} \right\}$$

